ĐẠI HỌC HUẾ

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ VĂN THUYẾT – TRƯƠNG CÔNG QUỲNH

GIÁO TRÌNH

MÔĐUN VÀ VÀNH

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC HUẾ

Huế, 2019

LỜI NÓI ĐẦU

Lý thuyết vành và môđun đóng một vai trò quan trọng trong đại số kết hợp. Trong cuốn Giáo trình *Môđun và Vành*, chúng tôi giả thiết là vành (không nhất thiết giao hoán) có phần tử đơn vị 1 khác với phần tử 0 và mọi R-môđun được cho là R-môđun phải unita. Với việc nghiên cứu nội tại cấu trúc vành, chúng ta đã có được Định lý nổi tiếng của Wedderburn-Artin, trong đó mô tả vành nửa đơn như là tổng trực tiếp của các vành ma trận trên một thể, mà vành ma trận trên một thể thì quá quen thuộc. Với sự tổng quát hóa không gian vectơ, ta có được các môđun, và từ đó có các phạm trù Mod-R (t.ư., R-Mod) các R-môđun phải (t.ư., trái). Người ta lại dùng phạm trù Mod-R và R-Mod để đặc trưng vành R. Phương pháp này mới ra đời nhưng đã tỏ ra có hiệu quả, và nhiều Định lý quan trọng ra đời, như Định lý mô tả vành nửa đơn của B. Osofsky thông qua các môđun cyclic, Định lý Faith - Walker về vành QF liên quan đến các môđun nội xạ và xạ ảnh,... Dĩ nhiên, đi xa hơn nữa, R. Wisbauer đã dùng một phạm trù con đầy của phạm trù Mod-R đó chính là $\sigma[M]$ để mô tả môđun M trên vành R.

Trong khuôn khổ một giáo trình dành cho các lớp sau đại học Toán, đặc biệt là chuyên ngành Đại số và Lý thuyết số, chúng tôi đề cập đến những kiến thức cơ bản nhất của lý thuyết vành và môđun. Dĩ nhiên, có thể kể đến hai phần không tách biệt: đó là công cụ của nó như căn, đế, vết, gạt bỏ,... và các lớp môđun và vành như Artin, Nơte, nửa đơn,... Các phần này nhằm cung cấp cho học viên những kiến thức cơ bản nhất, ngõ hầu có thể đạt được một phần nào các ý tưởng đã đề cập ở trên. Sau phần đó là đến phần những kết quả tổng hợp như Định lý Hopskin, các Định lý về vành nửa đơn,... và một số lớp vành quan trọng như vành hoàn chỉnh, nửa hoàn chỉnh, nửa nguyên sơ, chính quy von Neumann, lớp vành tựa Frobenius, giả Frobenius,...

Dựa trên tài liệu: Trương Công Quỳnh và Lê Văn Thuyết: *"Giáo trình Lý thuyết Vành và Môđun"*, NXB Đại học Huế, 2013, khởi đi từ định nghĩa của môđun, môđun con,... đến tổng trực tiếp, tích trực tiếp, môđun nội xạ, môđun xạ ảnh, tích tenxơ, môđun phẳng, môđun con cốt yếu, môđun con đối cốt yếu,... rồi mới đến các kiến thức sâu hơn về vành và môđun, thì trong tài liệu này, chúng tôi không đề cập lại những kiến thức đó và xem như chúng đã được học và nghiên cứu trong chương trình toán ở đại học cũng như trong môn Cơ sở Đại số hiện đại trong chương trình cao học. Chúng tôi đã trực tiếp chỉnh lý, bổ sung nhiều kiến thức vào các phần liên quan đến sinh và đối sinh trong phạm trù các môđun, tính chất Artin, Nơte, tính chất nửa đơn, căn và đế, các Định lý quan trọng của môđun và vành, các lớp vành quan trọng như hoàn chỉnh, nửa hoàn chỉnh, vành chính quy von Neumann, vành giả Frobenius, vành tựa Frobenius,... Nhiều ví dụ được cung cấp và tính toán chi tiết để làm rõ các khái niệm rất trừu tượng. Học viên nên đọc kỹ các ví dụ này và xem nó như là những bài tập mẫu để từ đó suy luận và làm những bài tập khác. Vì vậy, sau mỗi chương đều có bài tập và có phần hướng dẫn bài tập để các học viên có thể tự học và tự nghiên cứu.

Trong quá trình biên soạn, mặc dù đã nỗ lực cố gắng nhưng không thể tránh khỏi những thiếu sót, chúng tôi rất mong nhận được mọi góp ý của quý đồng nghiệp và bạn đọc để cuốn sách được hoàn thiện hơn trong lần tái bản sau.

Các tác giả

MỤC LỤC

BẢNG CÁC KÝ HIỆU

$\forall$	bất kỳ
$\exists$	tồn tại
$\Rightarrow$	suy ra
$\Leftrightarrow$	tương đương
$A \subseteq B$	A là tập con của B
$A \subset B$	A là tập con thực sự của B
$A \not\subseteq B$	A không là tập con của B
$A \setminus B$	$A \setminus B = \{a \mid a \in A$ và $a \notin B\}$
$A \leq B$	A là môđun con của B
$A \leq^e B$	A là môđun con cốt yếu (lớn) của B
$A \ll B$	A là môđun con đối cốt yếu (bé) của B
$A < B$	A là môđun con thực sự của B
$A \not\leq B$	A không là môđun con của B
$\blacksquare$	hết chứng minh
$\mathbb{N}$	tập các số tự nhiên
$\mathbb{Z}$	vành các số nguyên
$\mathbb{Q}$	trường các số hữu tỉ
$\mathbb{R}$	trường số thực
$\mathbb{C}$	trường các số phức
$\mathbb{P}$	tập các số nguyên tố
$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	vành các số nguyên môđulô p
$\mathbb{Z}_{p^\infty}$	nhóm Prüfer
$M_n(R)$	tập các ma trận vuông cấp n lấy hệ tử trong R
$\prod$	tích trực tiếp
$\oplus$	tổng trực tiếp
$\dotplus$	tổng trực tiếp vành
$M^{(X)}$	tổng trực tiếp $\lvert X\rvert$ bản sao của M
M^X	tích trực tiếp $\lvert X\rvert$ bản sao của M
$c(M)$	độ dài hợp thành của môđun M
$\hookrightarrow$	phép nhúng
Mod-R	phạm trù các R-môđun phải
R-Mod	phạm trù các R-môđun trái
Ab	phạm trù các nhóm aben ($\mathbb{Z}$-môđun)
$\sigma[M]$	phạm trù con của phạm trù Mod-R

r_R, r	linh hóa tử phải
l_R, l	linh hóa tử trái
$\|X\|$	lực lượng của tập X
$\|X)$	môđun con của M_R sinh ra bởi tập X
(X)	iđêan của vành R sinh ra bởi tập X