

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRƯỜNG CÔNG QUỲNH

GIÁO TRÌNH
CÁC ĐIỀU KIỆN
HỮU HẠN TRÊN VÀNH

ĐÀ NẴNG - NĂM 2021

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU	vii
DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU	1
DANH MỤC CÁC THUẬT NGỮ	2
Chương 1. Idêan nguyên tố	4
1.1 Idêan nguyên tố	4
1.1.1 Định nghĩa và một số tính chất	4
1.1.2 Idêan nguyên tố cực tiểu	8
1.2 Idêan nửa nguyên tố và tính lũy linh	10
1.2.1 Định nghĩa và các tính chất	10
1.2.2 Căn nguyên tố	14
1.3 Linh hóa tử và idêan nguyên tố liên kết	16
1.3.1 Linh hóa tử	16
1.3.2 Môđun trung thành	17
1.3.3 Idêan nguyên tố liên kết	19
1.4 Căn Jacobson, vành nguyên thủy và nửa nguyên thủy	20
1.4.1 Vành nguyên thủy	20
1.4.2 Căn Jacobson	22
1.4.3 Vành nửa nguyên thủy	25
Bài tập Chương 1	26
Chương 2. Môđun nửa đơn, Artin và Note	28
2.1 Môđun và vành nửa đơn	28
2.1.1 Môđun nửa đơn	28
2.1.2 Vành nửa đơn, Định lý Wedderburn-Artin	30
2.2 Môđun Note	31
2.2.1 Định nghĩa và một số tính chất	31
2.2.2 Môđun hữu hạn sinh	33
2.2.3 Định lý cơ sở của Hilbert	35
2.2.4 Một số lớp vành Note	36
2.3 Môđun Artin	39
2.3.1 Định nghĩa, một số tính chất	39

2.3.2	Môđun hữu hạn đối sinh	40
2.3.3	Định lý Hopkins-Levitzki	41
2.4	Độ dài của môđun	44
2.4.1	Định lý Jordan-Holder	44
2.4.2	Môđun có dãy hợp thành	45
	Bài tập Chương 2	47
Chương 3. Bao nội xạ		49
3.1	Môđun nội xạ và mở rộng cốt yếu	49
3.1.1	Môđun nội xạ	49
3.1.2	Mở rộng cốt yếu	53
3.1.3	Bao nội xạ	55
3.2	Môđun có hạng hữu hạn	66
3.2.1	Định nghĩa và tính chất	66
3.2.2	Điều kiện có hạng hữu hạn	68
3.3	Chiều đều (chiều Goldie) của môđun	69
3.3.1	Định nghĩa và tính chất	69
3.3.2	Điều kiện tương đương của môđun có chiều đều	70
3.3.3	Tổng trực tiếp của môđun nội xạ	71
3.4	Nguyên tố triệt	74
3.4.1	Định nghĩa	74
3.4.2	Một số tính chất khác	75
	Bài tập Chương 3	76
Chương 4. Vành nửa đơn của các vành thương		79
4.1	Định nghĩa vành các thương	79
4.1.1	Tập Ore, môđun X -xoắn và môđun X -không xoắn . .	79
4.1.2	Vành các thương của một vành	84
4.1.3	Xây dựng vành các thương	89
4.2	Định lý Goldie	90
4.2.1	Vành các thương cổ điển - Thứ tự trong vành	90
4.2.2	Miền Ore	90
4.2.3	Vành Goldie	92
4.2.4	Thứ tự trong vành nửa đơn - Định lý Goldie	96
	Bài tập Chương 4	99
Chương 5. Môđun trên vành Goldie nửa nguyên tố		101
5.1	Phần tử chính qui trong vành thương	101
5.1.1	Định nghĩa và một số tính chất	101
5.1.2	Idêan nguyên tố cực tiểu và các phần tử chính qui . . .	103
5.2	Môđun nội xạ không xoắn	105
5.2.1	Môđun xoắn và môđun không xoắn trên vành Goldie nửa nguyên tố	105

5.2.2	Môđun nội xạ và môđun chia được chính qui	106
5.2.3	Môđun nội xạ không xoắn trên vành Goldie nửa nguyên tổ	107
5.3	Môđun đều không xoắn trên vành Goldie nguyên tố	109
5.3.1	Môđun đều không xoắn	109
5.3.2	Môđun không xoắn trên vành Goldie nguyên tố	111
	Bài tập Chương 5	112
Chương 6. Bao và phủ tổng quát của môđun		114
6.1	Bao tổng quát của môđun	114
6.1.1	Các khái niệm và tính chất	114
6.1.2	Bao nội xạ tinh	120
6.2	Phủ tổng quát của môđun	126
6.2.1	Định nghĩa và tính chất	126
6.2.2	Mối liên hệ giữa phủ xạ ảnh và phủ tổng quát	131
6.2.3	Phủ phẳng và phủ không xoắn	133
6.3	Tính bất biến của các môđun	139
6.3.1	Môđun \mathcal{X} -bất biến đẳng cấu	139
6.3.2	Môđun bất biến đẳng cấu	143
6.4	Bao bất biến đẳng cấu và vành a -hypercyclic	150
6.4.1	Bao bất biến đẳng cấu của môđun	150
6.4.2	Các vành a -hypercyclic	154
	Bài tập Chương 6	157
	Chỉ mục	160

LỜI NÓI ĐẦU

Ngày nay, ngành đại số nói riêng và ngành toán học nói chung đã và đang phát triển mạnh mẽ. Một số kết quả nghiên cứu của một số tác giả đã đóng góp cho những lĩnh vực nghiên cứu toán học và một số ngành khoa học khác.

Hiện nay một số ngành toán đào tạo sau đại học của các trường đại học đã và đang giảng dạy học phần vành với điều kiện hữu hạn. Học phần này giúp cho các học viên có một cách nhìn tổng quát về các phần cơ bản của lý thuyết các vành cổ điển và đặc trưng của một số lớp vành liên quan. Nhằm mục đích để cho các học viên các ngành toán của Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng có một tài liệu tham khảo trong lĩnh vực này, chúng tôi đã cố gắng tìm hiểu các tài liệu để đưa ra giáo trình này. Để hiểu và nghiên cứu giáo trình này đòi hỏi học viên phải nắm vững các cấu trúc đại số cơ bản như: nhóm, vành, trường, không gian vectơ, lý thuyết môđun, lý thuyết vành....

Nội dung của giáo trình gồm 6 chương nhằm giới thiệu các kiến thức cơ bản nhất của lý thuyết vành cổ điển và một số lớp vành liên quan. Cuối mỗi phần trình bày của chương chúng tôi đưa ra các bài tập mục đích giúp học viên thực hành các khái niệm đã học.

Trong Chương 1, chúng tôi giới thiệu các khái niệm cơ sở về idêan nguyên tố. Trong chương này, chúng tôi nêu các khái niệm idêan nguyên tố, idêan nguyên tố cực tiểu, idêan nửa nguyên tố và linh hóa tử. Cuối cùng của chương này, chúng tôi trình bày khái niệm căn Jacobson và vành nguyên thủy và nửa nguyên thủy. Các khái niệm cơ bản này sẽ được sử dụng nghiên cứu cho các chương sau.

Nội dung Chương 2 trình bày về một khái niệm quan trọng trong lý thuyết vành và môđun đó là môđun nửa đơn, Artin và Note. Trong chương này, chúng tôi nêu và trình bày khái niệm và môđun nửa đơn, sau đó trình bày Định lý Wedderburn-Artin. Các phần còn lại chúng tôi trình bày một số tính chất liên quan của Định lý Hilbert và Định lý Hopkins-Levitzki cho các vành Artin và Note. Các kiến thức của chương này có thể làm nền tảng để nghiên cứu các tính chất sâu hơn cho các chương sau.

Chương 3. Chúng tôi trình bày khái niệm bao nội xạ của một môđun. Khái niệm này không những đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết vành và môđun mà nó có nhiều ứng dụng trong lĩnh vực đại số kết hợp. Trong chương này, chúng tôi trình bày các khái niệm cơ bản, một số tính chất của

bao nội xạ, môđun có hạng hữu hạn và chiều Goldie của môđun.

Chương 4, chúng tôi trình bày khái niệm các vành thương và vành nửa đơn. Mục đích của chương này nêu lên sự tồn tại của vành thương trong một số điều kiện. Cụ thể, trong chương này, chúng tôi trình bày các khái niệm và kết quả liên quan đến khái niệm vành thương, vành thương cổ điển và vành Goldie. Cuối cùng của chương, chúng tôi trình bày khái niệm thứ tự trong vành nửa đơn và Định lý Goldie.

Chương 5. Chúng tôi trình bày lớp môđun trên vành Goldie nửa nguyên tố. Trong chương này, chúng tôi trình bày các khái niệm phần tử chính qui trong vành thương, lớp môđun nội xạ và đều không xoắn.

Chương 6, chúng tôi trình bày và nghiên cứu bao và phủ tổng quát của các môđun. Mục đích của chương này nêu lên sự tồn tại của bao và phủ tổng quát của các môđun. Đồng thời áp dụng các kiến thức này chúng tôi nghiên cứu tính bất biến của các môđun. Lớp môđun bất biến này là trường hợp tổng quát của lớp môđun tựa nội xạ. Cụ thể, trong chương này, chúng tôi trình bày các khái niệm và kết quả liên quan đến bao và phủ tổng quát. Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu tính bất biến của các môđun. Cuối cùng của chương này chúng tôi nghiên cứu bao bất biến đẳng cấu và các vành a -hypercyclic.

Để hoàn thành giáo trình này tác giả đã nhận được những lời góp ý của hội đồng đánh giá giáo trình và của các đồng nghiệp trong Khoa Toán-Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng. Qua đó một số thiếu sót cũng như một số lỗi đã được kịp thời sửa chữa. Tuy nhiên, giáo trình không tránh khỏi những thiếu sót trong biên soạn, mong các độc giả thông cảm và cho chúng tôi những góp ý cần thiết.

TÁC GIẢ

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

KÝ HIỆU NGHĨA CỦA KÝ HIỆU

1_A	Xạ đồng nhất của vật A
\mathbb{N}	Tập hợp các số tự nhiên
\mathbb{Z}	Vành các số nguyên
\mathbb{Q}	Trường các số hữu tỷ
\mathbb{R}	Trường các số thực
$\mathbb{M}_n(R)$	Vành các ma trận vuông cấp n lấy hệ số trên vành R
$J(R)$	Căn Jacobson của vành R
\sqrt{I}	Căn của idêan I của vành R
$Pr(R)$	Căn nguyên tố của vành R
$Soc(R_R)$	Đế phải của vành R
$N \leq M$	N là môđun con của M
$N \leq^e M$	N là môđun con cốt yếu của M
$N \ll M$	N là môđun con đôi cốt yếu của M
$\text{ann}_R(X)$	Linh hóa tử của X trong R
$\text{ann}_M(P)$	Linh hóa tử của idêan P trong R -môđun phải M
$E(M)$	Bao nội xạ của M
$\text{Mod-}R$	Phạm trù các R -môđun phải
$\text{Im}(f)$	Ảnh của xạ f
$\text{Ker}(f)$	Hạt nhân của xạ f
$\prod_I A_i$	Tích trực tiếp của họ vật $\{A_i\}_{i \in I}$
$\bigoplus_I A_i$	Tổng trực tiếp của họ vật $\{A_i\}_{i \in I}$
M^I	Tích trực tiếp của các I -bản sao của M
$M^{(I)}$	Tổng trực tiếp của các I -bản sao của M
$f : A \rightarrow B$	Xạ f đi từ vật A đến vật B
f^{-1}	Xạ ngược của xạ f
$\text{Hom}(M, N)$	Nhóm các đồng cấu từ M đến N
$\text{End}(M)$	Vành các tự đồng cấu của M
$\text{Card}(A)$	Lực lượng tập hợp A

DANH MỤC CÁC THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ

TIẾNG ANH

Ảnh của đồng cấu	image of homomorphism
Bất biến đẳng cấu	Automorphism-invariant
Bất biến đồng cấu	Endomorphism-invariant
Đẳng cấu	Isomorphism
Căn nguyên tố	Prime radical
Căn Jacobson	Jacobson radical
Chiều Goldie hữu hạn	Finite Goldie dimension
Chuỗi nguyên tố	prime series
Đơn cấu	monomorphism
Hạng hữu hạn	Finite rank
Hạt nhân của đồng cấu	Kernel of morphism
Hữu hạn sinh	Finitely generated
Hữu hạn đối sinh	Finitely cogenerated
Biểu diễn hữu hạn	Finitely presented
Idêan nguyên tố	Prime ideal
Idêan nguyên tố liên kết	Associated prime ideal
Idêan nguyên tố cực tiểu	Minimal prime ideal
Idêan nửa nguyên tố	Semiprime ideal
Linh hóa tử	Annihilator
Linh hóa tử nguyên tố	Annihilator prime
m -hệ	m -system
Môđun con cốt yếu	Essential submodule
Môđun con đối cốt yếu	Superfluous submodule
Môđun trung thành	Faithful module
Môđun trung thành hoàn toàn	Completely faithful module
Môđun đơn	Simple module
Môđun nửa đơn	Semisimple module
Môđun đều	Uniform module

n -hệ	n -system
Nguyên tố triệt	assassinator prime
Toàn cấu	epimorphism
Tổng trực tiếp	direct sum
Trường	field
Vành nguyên thủy	Primitive ring
Vành nửa nguyên thủy	Semiprimitive ring
Vành Noether	Noetherian ring
Vành Artin	Artinian ring