

CÁC ĐẶC TRƯNG CẤP HAI CỦA TÍNH LỖI CHO CÁC HÀM KHÔNG TRƠN VỚI ĐẠO HÀM SCHWARZ TRÊN

Trần Văn Sự¹, Võ Văn Minh²

Tóm tắt: Hàm lỗi có vai trò quan trọng trong giải tích lỗi và có nhiều ứng dụng trong các bài toán tối ưu lỗi. Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng khái niệm của đạo hàm Schwarz trên cấp hai cho việc cung cấp điều kiện đủ về tính lỗi của hàm giá trị thực f xác định trên khoảng K tùy ý trong $\mathbf{R}$. Sử dụng khái niệm này, chúng tôi thiết lập điều kiện đủ về tính lỗi của hàm thực f xác định trên một tập lỗi $\|\cdot\|$ tùy ý trong không gian định chuẩn thực X dưới các giả thiết phù hợp về các đạo hàm theo hướng dưới cấp hai và đạo hàm theo hướng dưới Hadamard.

Từ khóa: Hàm lỗi, Tập lỗi, Đạo hàm Schwarz trên cấp hai, Đạo hàm theo hướng dưới cấp hai, Đạo hàm theo hướng dưới Hadamard.

1. Mở đầu Xuyên suốt bài báo này chúng tôi ký hiệu bởi $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn thực, K là một khoảng tùy ý với phần trong $\text{int}K$ khác rỗng trong không gian các số thực $\mathbf{R}$ và cho một tập con lỗi C của X , nghĩa là với mọi $x, y \in C$, đoạn thẳng nối 2 điểm x, y được ký hiệu bởi $[x, y]$ luôn nằm trong C . Giả sử rằng $\text{int}C$ là tập con không rỗng trong X . Có hai câu hỏi đặt ra ở đây cần được giải quyết như sau:

Câu hỏi 1: Tìm điều kiện đủ cấp hai để hàm giá trị thực $\rightarrow K \rightarrow \mathbf{R}$ là lỗi, nghĩa là với mọi $x, y \in K, t \in [0, 1]$, bất đẳng thức sau nghiệm đúng:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Câu hỏi 2: Tìm điều kiện đủ cấp hai để hàm giá trị thực $f: C \rightarrow \mathbf{R}$ là lỗi.

Được biết, nếu f khả vi liên tục 2 lần thì, nếu $f''(x) \geq 0$ với mọi x nằm trong miền xác định của hàm giá trị thực f thì f là lỗi. Vấn đề chúng tôi đang quan tâm ở đây là trong trường hợp f là hàm không trơn, nhưng liên tục, khi đó vấn đề trên được giải quyết thế nào? Chúng có còn đúng như trong trường hợp đạo hàm cấp hai cổ điển không?

Theo thông tin trong các bài báo đã xuất bản cách đây rất lâu (xem [1], [2], [3], [6], chẳng hạn), các đặc trưng (chủ yếu các đặc trưng cấp 1) về điều kiện đủ của tính lỗi tổng quát của các hàm giá trị thực mở rộng đã được nghiên cứu khá đầy đủ, chi tiết. Tuy nhiên, đối với các đặc trưng cấp hai, điều kiện đủ cho tính tựa lỗi của hàm f được nghiên cứu trong tài liệu tham khảo [4] bởi J.-P. Crouzeix (1980).

Mục đích chính của chúng tôi là đi trả lời hai câu hỏi trên trong trường hợp của đạo hàm Schwarz trên cấp hai không âm thì kết quả vẫn còn đúng như trong trường hợp cổ điển, và trong trường hợp của đạo hàm theo hướng dưới cấp hai không âm, dưới các giả thiết phù hợp về đạo hàm Hadamard dưới theo hướng, kết quả trên cũng đúng như trong trường hợp cổ điển.

1. TS, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Quảng Nam

2. ThS, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Quảng Nam

Với mục đích trên, trong phần kết quả chính của bài báo chúng tôi có giới thiệu một số khái niệm liên quan đến đạo hàm Schwarz trên cấp hai và đạo hàm Hadamard dưới theo hướng cho lớp các hàm vô hướng liên tục. Sử dụng định nghĩa này, chúng tôi đề xuất khái niệm đạo hàm theo hướng dưới cấp hai làm cơ sở xây dựng các đặc trưng cấp hai cho tính lỗi với lớp của các hàm không trơn.

2. Đặc trưng cấp hai cho tính lỗi của hàm không trơn với đạo hàm Schwarz trên và đạo hàm theo hướng dưới cấp hai

Phần này cung cấp các khái niệm cơ bản về đạo hàm theo hướng cấp một và cấp hai cho hàm vô hướng và đề xuất một mệnh đề về sự tồn tại của đạo hàm theo hướng dưới cấp hai.

2.1. Các khái niệm cơ sở

Định nghĩa 2.1.1 (Đạo hàm Schwarz trên cấp hai)

Cho hàm vô hướng $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Nhắc lại từ [6, 9] giới hạn sau

$$f_s''(v) := \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{f(v+t) + f(v-t) - 2f(v)}{t^2}$$

được gọi là đạo hàm Schwarz trên cấp hai của f tại điểm v .

Rõ ràng $f_s''(v)$ luôn tồn tại và có thể nhận các giá trị $\pm\infty$. Thật vậy, xét hàm vô hướng f cho bởi công thức sau:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{khi } x \neq 0 \\ 0, & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

Chọn điểm $v = 0$, ta có
$$f_s''(v) := \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) + f(-t) - 2f(0)}{t^2} = +\infty.$$

Xét hàm vô hướng $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ cho bởi công thức $g(x) = xf(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$. Thế thì

$$g_s''(v) := \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) + g(-t) - 2g(0)}{t^2} = 0.$$

Đạo hàm Fréchet cấp một và hai của hàm giá trị thực f tại $\bar{x}$ được ký hiệu tương ứng bởi $\nabla f(\bar{x})$, $\nabla^2 f(\bar{x})$. Để ý rằng với $f : X \rightarrow Y$, các ánh xạ tuyến tính liên tục $\nabla f : X \rightarrow Y$ và $\nabla^2 f : X \times X \rightarrow Y$ (xem [8], chẳng hạn).

Định nghĩa 2.1.2 (Đạo hàm Hadamard dưới theo hướng)

Cho hàm vô hướng $f : X \rightarrow \mathbf{R}$. Nhắc lại từ [5] giới hạn sau

$$f_H'(\bar{x}, v) := \liminf_{(t,u) \rightarrow (0+,v)} \frac{f(\bar{x} + tu) - f(\bar{x})}{t}$$

được gọi là đạo hàm Hadamard dưới theo hướng của f tại $\bar{x}$ theo hướng v .

Vận dụng Định nghĩa 2.1.2, bằng cách mở rộng sang khái niệm đạo hàm theo hướng cấp hai, chúng tôi giới thiệu khái niệm mới sau:

Định nghĩa 2.1.3 (Đạo hàm theo hướng dưới cấp hai)

Cho hàm vô hướng $f: X \rightarrow \mathbf{R}$. Đạo hàm theo hướng dưới cấp hai của f tại $\bar{x}$ theo hướng v là giới hạn sau:

$$f''_-(\bar{x}, v) := 2 \liminf_{(t,u) \rightarrow (0+,0)} \frac{f(\bar{x} + tv + t^2u) - f(\bar{x}) - tf'_H(\bar{x}, v)}{t^2}.$$

Tiếp theo chúng tôi cung cấp kết quả về sự tồn tại cho đạo hàm theo hướng dưới cấp hai:

Mệnh đề 2.1.4 (Sự tồn tại của đạo hàm theo hướng dưới cấp hai)

Cho hàm vô hướng $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ có đạo hàm Fréchet $\nabla f(x)$ tại mỗi điểm $x \in U$ với U là một lân cận nào đó của điểm $\bar{x} \in X$, và tồn tại đạo hàm Fréchet cấp hai $\nabla^2 f(\bar{x})$. Khi đó tồn tại đạo hàm theo hướng dưới cấp hai của hàm vô hướng f tại $\bar{x}$ theo mỗi hướng $v \in X$. Ngoài ra ta có đẳng thức đúng

$$f''_-(\bar{x}, v) := \nabla^2 f(\bar{x})(v, v).$$

Chứng minh: Giả sử rằng các điều kiện của giả thiết được thỏa mãn. Áp dụng Định nghĩa 2.1.2 ta được

$$\begin{aligned} f'_H(\bar{x}, v) &= \liminf_{(t,u) \rightarrow (0+,v)} \frac{f(\bar{x} + tu) - f(\bar{x})}{t} \\ &= \liminf_{(t,u) \rightarrow (0+,v)} \frac{f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(tu) + o(t) - f(\bar{x})}{t} \\ &= \lim_{u \rightarrow v} \nabla f(\bar{x})(u) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} \\ &= \nabla f(\bar{x})(v). \end{aligned}$$

Áp dụng Định nghĩa 2.1.3 kết hợp với khai triển Taylor đến cấp hai cho biểu thức $f(\bar{x} + tv + t^2u) := f(\bar{x} + t(v + tu))$, ta thu được kết quả sau

$$\begin{aligned} f''_-(\bar{x}, v) &= 2 \liminf_{(t,u) \rightarrow (0+,0)} \frac{f(\bar{x} + tv + t^2u) - f(\bar{x}) - tf'_H(\bar{x}, v)}{t^2} \\ &= 2 \liminf_{(t,u) \rightarrow (0+,0)} \frac{f(\bar{x} + t(v + tu)) - f(\bar{x}) - t\nabla f(\bar{x})(v)}{t^2} \\ &= 2 \liminf_{(t,u) \rightarrow (0+,0)} \left[\frac{f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(t(v + tu)) + \frac{1}{2} \nabla^2 f(\bar{x})(t(v + tu), t(v + tu))}{t^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{f(\bar{x}) + t\nabla f(\bar{x})(v) - o(t^2)}{t^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \liminf_{(t,u) \rightarrow (0+,0)} \left[\frac{\nabla f(\bar{x})(v+tu) - \nabla f(\bar{x})(v)}{t} + \frac{1}{2} \nabla^2 f(\bar{x})(v+tu, v+tu) + \frac{o(t^2)}{t^2} \right] \\
 &= 2 \liminf_{(t,u) \rightarrow (0+,0)} \frac{\nabla f(\bar{x})(v+tu) - \nabla f(\bar{x})(v)}{t} + 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t^2)}{t^2} \\
 &\quad + 2 \liminf_{(t,u) \rightarrow (0+,0)} \left[\frac{1}{2} \nabla^2 f(\bar{x})(v+tu, v+tu) \right].
 \end{aligned}$$

Hệ quả, $f''_-(\bar{x}, v) = \nabla^2 f(\bar{x})(v, v)$.

Điều phải chứng minh.

Trong các chứng minh trong Mệnh đề 2.1.4, chú ý rằng $o(t^i)$ là vô cùng bé bậc cao hơn t^i ($i=1,2$), nghĩa là $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t^i)}{t^i} = 0$, $i=1,2$.

2.2. Đặc trưng cấp hai cho tính lồi của hàm không trơn với đạo hàm Schwarz trên và với đạo hàm theo hướng dưới cấp hai

Mục đích chính của phần này là cung cấp các đặc trưng cấp hai cho tính lồi của hàm giá trị thực liên tục sử dụng công cụ đạo hàm theo hướng cấp hai.

Định lý 2.2.1 Cho hàm giá trị thực $\rightarrow K \rightarrow R$ liên tục với phần trong $\text{int}K$ khác rỗng. Điều kiện đủ để f lồi là

$$f''_s(v) = \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{f(v+t) + f(v-t) - 2f(v)}{t^2} \geq 0$$

tại mỗi phương $v \in \text{int}K$.

Chứng minh: Không mất tính tổng quát, có thể giả sử rằng $K \supseteq [a, b]$ nào đấy, ở đây a, b là hai số thực thỏa mãn $-\infty < a < b < +\infty$. Lấy một số thực $\varepsilon > 0$ tùy ý. Xét hàm vô hướng $g: K \rightarrow R$ cho bởi

$$g(v) = f(v) + \varepsilon(v-a)(v-b) + \frac{v-b}{b-a} f(a) - \frac{v-a}{b-a} f(b) \quad \forall v \in K.$$

Ta có g liên tục và do đó liên tục trên đoạn $[a, b]$, và thỏa mãn

$$\begin{cases} g(a) = 0 \\ g(b) = 0 \end{cases}. \quad (*)$$

Từ tính liên tục của g trên đoạn $[a, b]$, theo Định lý Weierstrass [7], tồn tại điểm $c \in [a, b]$ sao cho

$$g(c) = \max \{g(v) : a \leq v \leq b\}. \quad (1)$$

Ta chứng minh

$$g''_s(v) = f''_s(v) + 2\varepsilon. \quad (2)$$

Thật vậy, theo định nghĩa 2.1.1 ta có

$$\begin{aligned} g_s''(v) &= \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{g(v+t) + g(v-t) - 2g(v)}{t^2} \\ &= \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{f(v+t) + f(v-t) - 2f(v) + t^2 \varepsilon M}{t^2} \\ &= f_s''(v) + \varepsilon M, \end{aligned}$$

ở đây

$$\begin{aligned} M &= \frac{(v+t-a)(v+t-b) + (v-t-a)(v-t-b) - 2(v-a)(v-b)}{t^2} \\ &\quad + \frac{(a-v-t+a+t-v+2(v-a))f(b) + (v+t-b+v-t-b+2(b-v))f(a)}{\varepsilon(b-a)} \\ &= \frac{(v+t-a)(v+t-b) + (v-t-a)(v-t-b) - 2(v-a)(v-b)}{t^2} + \frac{0}{\varepsilon(b-a)} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức (2) được chứng minh.

Với mỗi phương $v \in (a, b) \subseteq \text{int } K$, ta thu được từ giả thiết $f_s''(v) \geq 0$ rằng

$$g_s''(v) > 0. \quad (3)$$

Do (*), nếu $g(c) > 0$ thì $c \in (a, b)$. Điều này cùng với (3) suy ra

$$g_s''(c) > 0. \quad (4)$$

Chọn $t > 0$ đủ bé sao cho $c+t, c-t \in [a, b]$, ta có

$$g_s''(c) = \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{g(c+t) + g(c-t) - 2g(c)}{t^2} \leq 0,$$

mâu thuẫn với bất đẳng thức (4).

Đề ý rằng nếu có $d \in [a, b]$ sao cho $g(d) > 0$, thì từ (1) cũng dẫn đến kết quả

$$g(c) > 0 \text{ (sự mâu thuẫn đã được chỉ ra bên trên).}$$

Do đó, $g(v) \leq 0 \quad \forall v \in [a, b]$. Theo cách xây dựng bên trên ta có

$$\begin{aligned} f(v) + \varepsilon(v-a)(v-b) + \frac{v-b}{b-a} f(a) - \frac{v-a}{b-a} f(b) &= g(v) \\ \Rightarrow f(v) + \varepsilon(v-a)(v-b) + \frac{v-b}{b-a} f(a) - \frac{v-a}{b-a} f(b) &\leq 0 \\ \Rightarrow f(v) + \varepsilon(v-a)(v-b) &\leq \frac{b-v}{b-a} f(a) + \frac{v-a}{b-a} f(b). \end{aligned}$$

Lấy giới hạn trong bất đẳng thức thu được trên khi $\varepsilon \rightarrow 0+$, ta được

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\frac{b-v}{b-a}a + \frac{v-a}{b-a}b\right) \\ &\leq \frac{b-v}{b-a}f(a) + \frac{v-a}{b-a}f(b). \end{aligned}$$

Ta chọn $s \in [0, 1]$ để $v = sa + (1-s)b$, lúc này ta lại thu được kết quả sau:

$$f(sa + (1-s)b) \leq sf(a) + (1-s)f(b) \quad \forall s \in [0, 1],$$

nghĩa là f là hàm lồi.

Hệ quả 2.2.2 Cho hàm giá trị thực $\rightarrow K \rightarrow R$ liên tục với phần trong $\text{int}K$ khác rỗng. Điều kiện đủ để f lồi là

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{f(v+t) + f(v-t) - 2f(v)}{t^2} \geq 0$$

tại mỗi điểm $v \in \text{int}K$.

Chứng minh: Là một hệ quả trực tiếp từ Định lý 2.2.1.

Định lý 2.2.3. Cho hàm giá trị thực $f: C \subset R$ liên tục với phần trong $\text{int} C$ khác rỗng. Điều kiện đủ để f lồi là cả hai điều kiện sau được thỏa mãn:

$$(i) \quad f'_H(\bar{x}, v) + f'_H(\bar{x}, -v) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in \text{int} C, v \in X.$$

$$(ii) \quad f'_H(\bar{x}, v) + f'_H(\bar{x}, -v) = 0 \quad \text{suy ra} \quad f''_-(\bar{x}, v) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in \text{int} C, v \in X.$$

Chứng minh: Vì f nhận giá trị hữu hạn, $f'_H(\bar{x}, v)$ và $f''_-(\bar{x}, v)$ luôn tồn tại với mọi $\bar{x} \in \text{int} C, v \in X$. Theo giả thiết (ii) ta cũng thu được

$$f''_-(\bar{x}, -v) \geq 0.$$

Lấy tùy ý $\bar{x} \in \text{int} C, v \in X \setminus \{0\}$. Theo định nghĩa phần trong, tồn tại số thực h để

$$\bar{x} + hv \in \text{int} C.$$

Từ (i) suy ra

$$f'_H(\bar{x} + hv, v) + f'_H(\bar{x} + hv, -v) \geq 0.$$

Xét hai trường hợp sau:

$$1: f'_H(\bar{x} + hv, v) + f'_H(\bar{x} + hv, -v) > 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} &\liminf_{t \rightarrow 0+} \frac{f(\bar{x} + (h+t)v) + f(\bar{x} + (h-t)v) - 2f(\bar{x} + hv)}{t} \\ &\geq \liminf_{(t, v') \rightarrow (0+, 0)} \frac{f(\bar{x} + hv + t(v + v')) + f(\bar{x} + hv + t(-v + v')) - 2f(\bar{x} + hv)}{t} \\ &\geq f'_H(\bar{x} + hv, v) + f'_H(\bar{x} + hv, -v) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Vậy với mọi số dương t đủ bé ta được

$$f(\bar{x} + (h+t)v) + f(\bar{x} + (h-t)v) - 2f(\bar{x} + hv) > 0$$

và

$$\liminf_{t \rightarrow 0+} \frac{f(\bar{x} + (h+t)v) + f(\bar{x} + (h-t)v) - 2f(\bar{x} + hv)}{t^2} = +\infty.$$

Hệ quả

$$f_s''(\bar{x} + hv) > 0.$$

$$2: f_H'(\bar{x} + hv, v) + f_H'(\bar{x} + hv, -v) = 0.$$

Theo định nghĩa ta có

$$\begin{aligned} f_s''(\bar{x} + hv) &\geq \liminf_{t \rightarrow 0+} \frac{f(\bar{x} + (h+t)v) + f(\bar{x} + (h-t)v) - 2f(\bar{x} + hv)}{t^2} \\ &\geq 2 \liminf_{(t,w) \rightarrow (0+,0)} \left[\frac{f(\bar{x} + (h+t)v + t^2w) + f(\bar{x} + (h-t)v + t^2w)}{t^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2f(\bar{x} + hv) + tf_H'(\bar{x} + hv, v) + tf_H'(\bar{x} + hv, -v)}{t^2} \right] \\ &\geq f_-''(\bar{x} + hv, v) + f_-''(\bar{x} + hv, -v) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Theo Định lý 2.2.1, ánh xạ $h: K \rightarrow \mathbf{R}$ cho bởi biểu thức

$$h(s) = f(\bar{x} + sv) \quad (\forall s \in K)$$

liên tục với mọi $\bar{x} \in \text{int } C$, $v \in X$. Do đó, hàm giá trị thực f cũng lồi.

Điều phải chứng minh.

Hệ quả 2.2.4 Cho phần trong $\text{int } f$: khác rỗng và hàm giá trị thực $f: C \rightarrow \mathbf{R}$ liên tục và khả vi Fréchet cấp 1 và 2 tại mọi điểm $x \in C$. Điều kiện đủ để f lồi là cả hai điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\nabla f(\bar{x})(v) + \nabla f(\bar{x})(-v) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in \text{int } C, v \in X.$$

$$\nabla f(\bar{x})(v) + \nabla f(\bar{x})(-v) = 0 \quad \text{suy ra } \nabla^2 f(\bar{x})(v, v) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in \text{int } C, v \in X.$$

Chứng minh: Lập luận tương tự các bước như trong chứng minh Mệnh đề 2.1.4, chúng ta dễ dàng thấy rằng (i) tương đương với

$$f_H'(\bar{x}, v) + f_H'(\bar{x}, -v) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in \text{int } C, v \in X,$$

và (ii) tương đương với

$$f_H'(\bar{x}, v) + f_H'(\bar{x}, -v) = 0$$

suy ra

$$f_-''(\bar{x}, v) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in \text{int } C, v \in X.$$

Chứng minh kết quả còn lại là một hệ quả trực tiếp từ Định lý 2.2.3.

Điều phải chứng minh.

3. Kết luận

Bài báo đã cung cấp một số điều kiện đủ theo ngôn ngữ của đạo hàm Schwarz trên cấp hai và đạo hàm theo hướng dưới cấp hai để một hàm số thực cho trước mà là liên tục thì trở thành lồi. Bên cạnh, bài báo cũng đã đưa ra khái niệm đạo hàm theo hướng dưới cấp hai và điều kiện tồn tại của chúng để làm cơ sở cho nghiên cứu các đặc trưng cấp hai về tính lồi với các hàm liên tục.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] J-P. Aubin, H.Frankowska (1990), “*Set-Valued Analysis*”, Birkhauser, Boston.
- [2] A. Cambina, L. Martein (2009), “*Generalized Convexity and Optimization. Theory and Applications*”, Springer, Berlin.
- [3] J.-P. Crouzeix (1998), “*Characterizations of generalized convexity and monotonicity*”, a survey. In: Generalized Convexity, Generalized Monotonicity, 237-256.
- [4] J.-P. Crouzeix (1980), “On second order conditions for quasiconvexity”, *Math. Program* (18), 349-352.
- [5] B. Jiménez, V. Novo (2008), “First order optimality conditions in vector optimization involving stable functions”, *Optimization* (57), 449-471.
- [6] R.T.Rockafellar (1970), “*Convex Analysis*”, Princeton University Press, Princeton.
- [7] Nguyễn Đông Yên (2007), “*Giáo trình Giải tích đa trị*”, Nhà xuất bản Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, 1-218.
- [8] Le Thanh Tung (2020), “On higher-order proto-differentiability and higher-order asymptotic proto-differentiability of weak perturbation maps in parametric vector optimization”, *Positivity* (online) <https://doi.org/10.1007/s11117-020-00778-2>
- [9] F. Clarke (1983), “*Optimization and Nonsmooth Analysis*”, New York, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons.

TITLE: SECOND-ORDER CHARACTERISTICS OF CONVEXITY FOR NONSMOOTH FUNCTIONS WITH UPPER SCHWARZ DERIVATIVES

TRAN VAN SU, VO VAN MINH

Department of mathematics, Quang Nam University

Abstract: *Convex function has an important role in Convex Analysis because of its applications in convex optimization problems. In this paper, we use the concept of second-order upper Schwarz derivative for providing sufficient conditions for convexity of the real-valued function f defined on the arbitrary interval K in $\mathbf{R}$. Using these concept, we establish sufficient conditions for convexity of the real-valued function f defined on the arbitrary convex C in the real normed space X under some suitable assumptions on the second-order lower directional derivatives and the lower directional Hadamard derivative.*

Key words: *Convex function, Convex set, Second-order upper Schwarz derivative, Second-order lower directional derivative, Lower directional Hadamard derivative.*