

VỀ CHỈ SỐ CHÍNH QUY CASTELNUOVO-MUMFORD CỦA VÀNH TỌA ĐỘ CỦA TẬP $n+3$ ĐIỂM BÉO KHÔNG SUY BIẾN TRONG KHÔNG GIAN XẠ ẢNH $\mathbb{P}^n$

Phan Văn Thiện¹, Trần Nam Sinh^{2*}, Nguyễn Thanh Quang³

¹ Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, 34 Lê Lợi, Huế, Việt Nam

² Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng, 459 Tôn Đức Thắng, Quận Liên Chiểu, Đà Nẵng, Việt Nam

³ Trường THPT Chuyên Lê Khiết, 112 Chu Văn An, Tp. Quảng Ngãi, Quảng Ngãi, Việt Nam

* Tác giả liên hệ Trần Nam Sinh <tnsinh@ued.udn.vn>

(Ngày nhận bài: 17-05-2021; Ngày chấp nhận đăng: 24-06-2021)

Tóm tắt. Trong bài báo này chúng tôi tính chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của vành tọa độ của tập $n+3$ điểm béo không suy biến trong $\mathbb{P}^n$ cho hầu hết các trường hợp của tập điểm.

Từ khóa: tập điểm béo, chỉ số chính quy, hàm Hilbert, vành tọa độ

On the Castelnuovo-Mumford regularity index of the coordinate ring of a set of $n+3$ non-degenerate fat points in projective space $\mathbb{P}^n$

Phan Van Thien¹, Tran Nam Sinh^{2*}, Nguyen Thanh Quang³

¹ University of Education, Hue University, 34 Le Loi St., Hue, Vietnam

² The University of Da Nang – University of Science and Education, 459 Ton Duc Thang St., Lien Chieu, Da Nang, Vietnam

³ Le Khiet High School for the Gifted, 112 Chu Van An St., Quang Ngai City, Quang Ngai, Vietnam

* Correspondence to Tran Nam Sinh <tnsinh@ued.udn.vn>

(Received: 17 May 2021; Accepted: 24 June 2021)

Abstract. In this paper we calculate the Castelnuovo-Mumford regularity index of the coordinate ring of a set of $n+3$ non-degenerate fat points in $\mathbb{P}^n$ for almost all of cases.

Keywords: fat points, regularity index, Hilbert function, coordinate ring

1 Mở đầu

Cho $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}_k^n$ là một không gian xạ ảnh trên trường đóng đại số k và $P_1, \dots, P_s$ là các điểm phân biệt trong $\mathbb{P}^n$. Cho $R := k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ là vành đa thức theo $n+1$ biến $x_0, x_1, \dots, x_n$ với hệ số trên

k . Với mỗi $i = 1, \dots, s$; ký hiệu $\wp_i$ là idêan nguyên tố thuần nhất trong R , xác định bởi điểm P_i . Cho $m_1, \dots, m_s$ là các số nguyên dương. Lược đồ chiều không xác định bởi idêan $I = \wp_1^{m_1} \cap \dots \cap \wp_s^{m_s}$ được gọi là tập s điểm béo trong $\mathbb{P}^n$ và được ký hiệu bằng $Z = m_1 P_1 + \dots + m_s P_s$.

Vành tọa độ thuần nhất của Z là $A := R/I$. Đây là một vành phân bậc, $A = \bigoplus_{t \geq 0} A_t$, có số bội $e(A) := \sum_{i=1}^s \binom{m_i + n - 1}{n}$. Với mỗi $t \in \mathbb{N}$, phần phân bậc A_t là một k -không gian véc tơ hữu hạn chiều. Hàm số $H_Z(t) = \dim_k A_t$ được gọi là hàm Hilbert của Z . Hàm $H_Z(t)$ tăng chặt cho đến khi đạt được số bội $e(A)$ tại đó nó dừng. Chỉ số chính quy của Z là số nguyên dương t bé nhất sao cho $H_Z(t) = e(A)$ và nó được ký hiệu là $\text{reg}(Z)$. Chỉ số chính quy $\text{reg}(Z)$ cũng chính là chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford $\text{reg}(A)$ của vành tọa độ A .

Việc tính được giá trị của $\text{reg}(Z)$ là rất khó, vì vậy người ta tìm cách chặn trên cho $\text{reg}(Z)$. Từ năm 1961 đến nay, đã có nhiều kết quả về chặn trên cho $\text{reg}(Z)$ được công bố [1-4, 6, 7] và hiện nay bài toán chặn trên cho $\text{reg}(Z)$ đã được Nagel và Trok giải quyết thành công trong trường hợp tổng quát [5]. Tuy nhiên, hiện nay các kết quả về việc tính $\text{reg}(Z)$ đang còn rất khiêm tốn, chỉ có vài kết quả được đăng trên tạp chí uy tín như sau.

Cho tập điểm béo $Z = m_1 P_1 + \dots + m_s P_s$ trong $\mathbb{P}^n$, Davis và Geramita [3] đã tính được

$$\text{reg}(Z) = m_1 + \dots + m_s - 1$$

khi $P_1, \dots, P_s$ nằm trên cùng một đường thẳng. Tập điểm $\{P_1, \dots, P_s\}$ trong $\mathbb{P}^n$ gọi là ở vị trí tổng quát nếu không có $j+1$ điểm nằm trên cùng một $(j-1)$ -phẳng, $j=1, \dots, n$. Cho a là một số hữu tỷ. Ký hiệu $[a]$ là phần nguyên của a . Catalisano và cs. [2] đã tính được $\text{reg}(Z)$ trong hai trường hợp:

– Nếu $s \geq 2$, $2 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_s$ và $P_1, \dots, P_s$ nằm trên một đường cong hữu tỷ chuẩn trong $\mathbb{P}^n$, thì $\text{reg}(Z) = \max\{m_1 + m_2 - 1, [\sum_{i=1}^s m_i + n - 2] / n\}$.

– Nếu $n \geq 3$, $2 \leq s \leq n+2$, $2 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_s$ và $P_1, \dots, P_s$ nằm ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n$, thì $\text{reg}(Z) = m_1 + m_2 - 1$.

Đặt

$$T_j = \max\left\{\left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^q m_{i_j} + j - 2}{j} \right\rfloor \mid P_{i_1}, \dots, P_{i_q}\right.$$

nằm trên một j -phẳng

Thiện [8] đã tính được

$$\text{reg}(Z) = \max\{T_j \mid j = 1, \dots, n\}$$

cho $Z = m_1 P_1 + \dots + m_{s+2} P_{s+2}$ với $P_1, \dots, P_{s+2}$ không nằm trên cùng một $(s-1)$ -phẳng trong $\mathbb{P}^n$, $s \leq n$; và vào năm 2017, Thiện và Sinh [10] đã tính được $\text{reg}(Z) = \max\{T_j \mid j = 1, \dots, n\}$

cho $Z = m P_1 + \dots + m P_{s+3}$ với $m \neq 2$ và $P_1, \dots, P_{s+3}$ không nằm trên $(r-1)$ -phẳng trong $\mathbb{P}^n$, $s \leq r+3$. Thiện và Trinh [11] đã đưa ra những ước lượng (chặn trên và chặn dưới) cho $\text{reg}(Z)$ trong một số trường hợp của tập điểm béo. Tập các điểm béo $Z = m_1 P_1 + \dots + m_s P_s$ gọi là không suy biến trong $\mathbb{P}^n$ nếu $P_1, \dots, P_s$ không cùng nằm trong một siêu phẳng. Ballico và cs. [1] đã chỉ ra chặn trên cho chỉ số chính quy của tập $n+3$ điểm béo $Z = m_1 P_1 + \dots + m_{n+3} P_{n+3}$ không suy biến trong $\mathbb{P}^n$: $\text{reg}(Z) \leq \max\{T_j \mid j = 1, \dots, n\}$.

Trong bài báo này, bằng cách sử dụng chặn trên của Ballico và cs. [1], các kết quả về chặn dưới cho chỉ số chính quy của tập các điểm béo [9] và một số kết quả khác, chúng tôi tính $\text{reg}(Z)$ cho hầu hết các trường hợp của tập $n+3$ điểm béo không suy biến trong $\mathbb{P}^n$ (Định lý 2.5). Các kết quả của chúng tôi là mới.

2 Các kết quả

Đầu tiên chúng tôi tính chỉ số chính quy của tập $n+3$ điểm béo không suy biến trong $\mathbb{P}^n$; $n=1, 2$.

Mệnh đề 2.1. Cho $X = \{P_1, \dots, P_{n+3}\}$ là một tập $n+3$ điểm phân biệt không suy biến trong $\mathbb{P}^n$; $n=1, 2$

. Cho $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{n+3}$ là các số nguyên dương và $Z = m_1 P_1 + \dots + m_{n+3} P_{n+3}$. Khi đó,

$$\text{reg}(Z) = \max\{T_j \mid j = 1, \dots, n\},$$

trong đó

$$T_j = \max\left\{\left\lfloor \frac{\sum_{l=1}^j m_{i_l} + j - 2}{j} \right\rfloor \mid P_{i_1}, \dots, P_{i_j}\right.$$

nằm trên một j -phẳng\}.

Chứng minh: Đặt $T = \max\{T_j \mid j = 1, \dots, n\}$.

Ta sẽ chứng minh $\text{reg}(Z) = T$. Với $n = 1$: theo [3, Corollary 3], ta có

$$\text{reg}(Z) = m_1 + \dots + m_4 - 1 = T.$$

Với $n = 2$: Nếu tập điểm X ở vị trí tổng quát thì theo [10, Theorem 3.1], ta có

$$\text{reg}(Z) = T.$$

Nếu tập X không ở vị trí tổng quát thì X nằm trên hai đường thẳng, gọi là l_1 và l_2 . Có thể giả sử rằng $T_1 = m_1 + \dots + m_r - 1$ với $P_1, \dots, P_r$ nằm trên l_1 . Đặt $I = \wp_1^{m_1} \cap \dots \cap \wp_5^{m_5}$. Khi đó

$$\text{reg}(Z) = \text{reg}(R/I)$$

và

$$T_1 + 1 \geq \left\lfloor \frac{m_1 + \dots + m_5}{2} \right\rfloor = T_2.$$

Có hai trường hợp sau cho T_1 và T_2 .

- $T_1 \geq T_2$: Khi đó $T = T_1$. Đặt $U = m_1 P_1 + \dots + m_r P_r$. Sử dụng [3, Corollary 3] và [9, Proposition 6], ta có $\text{reg}(Z) \geq \text{reg}(U) = T_1$.

Hơn nữa, theo [1, Theorem 2.1], ta có $\text{reg}(Z) \leq T = T_1$.

Từ đó ta nhận được $\text{reg}(Z) = T_1 = T$.

- $T_2 > T_1$: Khi đó $T = T_2$ và $T_2 = T_1 + 1$. Theo [1, Theorem 2.1], ta có $\text{reg}(Z) \leq T_2$.

Vì vậy, ta còn phải chứng minh $\text{reg}(Z) \geq T_2$.

Ta có $P_1, \dots, P_5 \in l_1 \cup l_2$, với $P_1, \dots, P_r$ nằm trên l_1 và $P_{r+1}, \dots, P_5$ nằm trên l_2 . Do

$$\left\lfloor \frac{m_1 + \dots + m_5}{2} \right\rfloor = T_2 = T_1 + 1 \geq m_1 + \dots + m_r$$

nên $m_{r+1} + \dots + m_5 \geq m_1 + \dots + m_r$. Vì vậy,

$$T_2 = \left\lfloor \frac{m_1 + \dots + m_5}{2} \right\rfloor$$

$$\leq \left\lfloor \frac{2(m_{r+1} + \dots + m_5)}{2} \right\rfloor$$

$$= m_{r+1} + \dots + m_5.$$

Hơn nữa, $T_2 = T_1 + 1 \geq m_{r+1} + \dots + m_5$ nên $T_2 = m_{r+1} + \dots + m_5$.

Ta chọn $\wp_5 = (x_1, x_2)$, $\wp_1 = (x_0, x_2)$, $\wp_r = (x_0, x_1)$ và $\wp_j = (x_0, a_j x_2 - b_j x_1)$, $j = 2, \dots, r-1$.

Bởi vì $x_0^{T_2 - m_5} x_1^{m_5 - 1} \notin (x_0, x_2)^{m_1} \cap (x_0, a_2 x_2 - b_2 x_1)^{m_2} \cap \dots \cap (x_0, a_{r-1} x_2 - b_{r-1} x_1)^{m_{r-1}} \cap (x_0, x_1)^{m_r} + (x_1, x_2)^{m_5}$ suy ra $x_0^{T_2 - m_5} x_1^{m_5 - 1} \notin J + \wp_5^{m_5}$ nên theo [2, Lemma 3], ta có $\text{reg}(R/(J + \wp_5^{m_5})) \geq T_2$.

Sử dụng [2, Lemma 1], ta có

$$\text{reg}(Z) = \text{reg}(R/(J + \wp_5^{m_5})) \geq T_2.$$

Mệnh đề 2.1 đã được chứng minh xong.

□

Kết quả sau đây giúp chúng tôi tính chỉ số chính quy của tập điểm béo không suy biến trong $\mathbb{P}^n$, $n \geq 3$.

Mệnh đề 2.2. Cho $n \geq 3$ là số nguyên và $X = \{P_1, \dots, P_{n+3}\}$ là một tập $n+3$ điểm phân biệt không suy biến trong $\mathbb{P}^n$ sao cho không có $s+3$ điểm nào của X nằm trên một s -phẳng, $s < n$. Cho $2 \leq m_1 \geq \dots \geq m_{n+3}$ là các số nguyên dương và $Z = m_1 P_1 + \dots + m_{n+3} P_{n+3}$. Đặt $T = \max\{T_j \mid j = 1, \dots, n\}$,

$$\text{với } T_j = \max\left\{\left\lfloor \frac{\sum_{l=1}^j m_{i_l} + j - 2}{j} \right\rfloor \mid P_{i_1}, \dots, P_{i_j}\right.$$

nằm trên một j -phẳng\}.

Khi đó, nếu

$T = T_1$ hoặc $T = T_2$ thì $\text{reg}(Z) = T$.

Chứng minh: Xét hai trường hợp sau cho T .

- $T = T_1$: Gọi ℓ là đường thẳng đi qua các điểm $P_1, \dots, P_r, r \leq 3$ sao cho $T_1 = m_1 + \dots + m_r$. Xét tập điểm béo $Z = m_1 P_1 + \dots + m_{n+3} P_{n+3}$ và tập điểm béo $Y = m_1 P_1 + \dots + m_r P_r$. Sử dụng [3, Corollary 3] và [9, Proposition 6], ta có

$$\text{reg}(Z) \geq \text{reg}(Y) = T_1 = T.$$

Theo [1, Theorem 2.1], ta có $\text{reg}(Z) \leq T = T_1$.

Từ đó $\text{reg}(Z) = T$.

- $T > T_1$: Khi đó $T = T_2$, không có 3 điểm của X nằm trên một đường thẳng và không có 5 điểm của X nằm trên một 2-phẳng. Gọi γ là 2-phẳng đi qua các điểm $P_1, \dots, P_q, q \leq 4$, sao cho

$$T_2 = \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^q m_i}{2} \right\rfloor.$$

Xét tập điểm béo $U = m_1 P_1 + \dots + m_q P_q$, theo [8, Theorem 3.4], ta có $\text{reg}(U) = T_2$. Sử dụng [9, Proposition 6], ta có $\text{reg}(Z) \geq \text{reg}(U) = T_2$.

Mặt khác, theo [1, Theorem 2.1], ta có $\text{reg}(Z) \leq T = T_2$.

Từ đó ta nhận được $\text{reg}(Z) = T$.

Mệnh đề 2.2 đã được chứng minh.

□

Trong mệnh đề tiếp theo sau đây chúng tôi sẽ tính chỉ số chính quy của tập 6 điểm béo không suy biến trong $\mathbb{P}^3$.

Mệnh đề 2.3. Cho $X = \{P_1, \dots, P_6\}$ là một tập 6 điểm phân biệt không suy biến trong $\mathbb{P}^3$ sao cho không có $s+3$ điểm nào của X nằm trên một s -phẳng, $s < 3$. Cho $2 \leq m_1 \geq \dots \geq m_6$ là các số nguyên dương và $Z = m_1 P_1 + \dots + m_6 P_6$. Đặt

$$T_j = \max\left\{\left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^q m_i + j - 2}{j} \right\rfloor \mid P_1, \dots, P_q \right.$$

nằm trên một j -phẳng}. Ta có,

$$\text{reg}(Z) = \max\{T_j \mid j = 1, 2, 3\}$$

ngoại trừ trường hợp bao gồm các điều kiện: $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 + 1 = m$, không có 3 điểm nằm trên một đường thẳng, có một 2-phẳng đi qua P_6 và 3 điểm của $\{P_1, \dots, P_5\}$. Trong trường hợp này, ta có $T_1 = T_2 = 2m - 1$, $T_3 = 2m$ và

$$\text{reg}(Z) = 2m - 1 \text{ hay } \text{reg}(Z) = 2m.$$

Chứng minh: Đặt

$$T = \max\{T_j \mid j = 1, 2, 3\}.$$

Xét hai trường hợp sau đây của tập điểm X .

Trường hợp 1:

$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 + 1 = m$. Ta chia thành hai trường hợp con sau:

Trường hợp 1.a: X ở vị trí tổng quát. Khi đó,

$$T_1 = 2m - 1, \quad T_2 = \left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor \text{ và}$$

$$T_3 = \left\lfloor \frac{m_1 + \dots + m_6 + 1}{3} \right\rfloor = 2m. \text{ Sử dụng [10, Theorem 3.1], ta có } \text{reg}(Z) = 2m = T.$$

Trường hợp 1.b: X không ở vị trí tổng quát. Khi đó, có một trong hai khả năng sau:

- X có ba điểm nằm trên một đường thẳng. Do không có $s+3$ điểm nào của X nằm trên s -phẳng, $s < 3$, nên không có 4 điểm của X nằm trên một đường thẳng. Gọi ℓ là đường thẳng đi qua ba điểm của X . Ta có $T_1 = 3m - 1$ (nếu ℓ không đi qua P_6) hoặc $T_1 = 3m - 2$ (nếu ℓ đi qua P_6), $T_2 \leq 2m, T_3 = 2m$. Do đó

$$T = \max\{T_1, T_2, T_3\} = T_1.$$

Sử dụng [3, Corollary 3] và [9, Proposition 6], ta có $\text{reg}(Z) \geq T_1$.

Hơn nữa, theo [1, Theorem 2.1], ta có $reg(Z) \leq T$.

Từ đó ta nhận được $reg(Z) = T_1 = T$.

• X không có ba điểm nằm trên một đường thẳng. Khi đó $T_1 = 2m-1$, $T_3 = 2m$ và có bốn điểm của X nằm trên 2-phẳng và không có năm điểm của X nằm trên 2-phẳng. Gọi β là 2-phẳng đi qua bốn điểm của X , gọi là P_1, P_2, P_3, P_4 , sao cho

$$T_2 = \left\lfloor \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{2} \right\rfloor.$$

Nếu β không đi qua P_6 , thì $T_2 = 2m$. Suy ra $T = T_2$. Theo Mệnh đề 2.2, ta có

$$reg(Z) = T = 2m.$$

Nếu β đi qua P_6 , thì $T_2 = \left\lfloor \frac{4m-1}{2} \right\rfloor < 2m = T_3$.

Hơn nữa $T_1 = 2m-1$. Do đó $T = T_3 = 2m$. Đặt $Y = mP_1 + mP_2$, khi đó theo [3, Corollary 3] và [9, Proposition 6], ta có $reg(Z) \geq reg(Y) = T_1 = 2m-1$.

Mặt khác, theo [1, Theorem 2.1], ta có $reg(Z) \leq T = \max\{T_1, T_2, T_3\} = 2m$.

Suy ra $2m-1 \leq reg(Z) \leq 2m$. Vậy,

$$reg(Z) = 2m-1 \text{ hoặc } reg(Z) = 2m.$$

Trường hợp 2: Các m_i không thỏa $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 + 1 = m$. Nếu X nằm ở vị trí tổng quát, thì theo [10, Theorem 3.1], ta có $reg(Z) = T$.

Nếu X không ở vị trí tổng quát thì sẽ có hai trường hợp sau.

Trường hợp 2.a: $m_1 = m_2 = \dots = m_6 = m$. Ta có $T_3 = 2m$. Do X không nằm ở vị trí tổng quát nên sẽ có 3 điểm nằm trên một đường thẳng hay có 4 điểm nằm trên một 2-phẳng. Khi đó, $T_1 = 3m-1$ hay $T_2 = 2m$, nên $T = T_1$ hay $T = T_2$. Theo Mệnh đề 2.2, ta có $reg(Z) = T$.

Trường hợp 2.b: Các m_i không nằm trong Trường hợp 2.a. Khi đó ta có các trường hợp sau:

i) $m_1 = m+1, m_2 = \dots = m_6 = m$.

Khi đó, $T_3 = \left\lfloor \frac{6m+2}{3} \right\rfloor = 2m$,

$$T_1 \geq m_1 + m_2 - 1 = 2m. \text{ Vì vậy, } T = \max\{T_1, T_2\}. \quad (3.1)$$

ii) Hoặc $m_1 \geq m_5 + 1, m_2 \geq m_6 + 1$ hoặc

$$m_1 \geq m_6 + 2.$$

• Nếu $m_1 \geq m_5 + 1, m_2 \geq m_6 + 1$:

Ta có

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 - \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_6 + 1}{3} \\ = \frac{2m_1 + 2m_2 - m_3 - m_4}{3} \\ + \frac{-m_5 - m_6 - 1}{3} \\ \geq \frac{(m_1 - m_3) + (m_2 - m_4)}{3} \\ + \frac{[m_1 + (m_5 + 1)]}{3} \\ + \frac{[m_2 - (m_6 + 1) + 1]}{3} > 0. \end{aligned}$$

Vì vậy,

$$m_1 + m_2 > \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_6 + 1}{3}.$$

$$\text{Suy ra } m_1 + m_2 > \left\lfloor \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_6 + 1}{3} \right\rfloor.$$

$$\text{Do đó, } m_1 + m_2 - 1 \geq \left\lfloor \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_6 + 1}{3} \right\rfloor,$$

$$\text{hay } T_1 \geq T_3. \quad (3.2)$$

• Nếu $m_1 \geq m_6 + 2$, ta có

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 - \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_6 + 1}{3} \\ = \frac{2m_1 + 2m_2 - m_3 - m_4}{3} \\ - \frac{-m_5 - m_6 - 1}{3} \\ \geq \frac{(m_1 - m_3) + (m_2 - m_4) + (m_2 - m_5)}{3} \end{aligned}$$

$$+ \frac{[m_1 - (m_6 + 2)] + 1}{3} > 0.$$

$$\text{Vì vậy, } m_1 + m_2 > \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_6 + 1}{3}.$$

$$\text{Suy ra } m_1 + m_2 > \left\lfloor \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_6 + 1}{3} \right\rfloor.$$

$$\text{Do đó, } m_1 + m_2 - 1 \geq \left\lfloor \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_6 + 1}{3} \right\rfloor,$$

$$\text{hay } T_1 \geq T_3, \quad (3.3)$$

Từ (3.2) và (3.3), ta có

$$T = \max\{T_1, T_2\}. \quad (3.4)$$

Từ (3.1), (3.4) và sử dụng Mệnh đề 2.2, ta có $\text{reg}(Z) = T$.

Mệnh đề 2.3 đã được chứng minh xong.

□

Kết quả chính của bài báo này nằm trong Định lý 2.5. Bổ đề sau đây sẽ giúp chứng minh Định lý 2.5.

Bổ đề 2.4. Cho $X = \{P_1, \dots, P_{n+3}\}$ là một tập $n+3$ điểm phân biệt không suy biến trong $\mathbb{P}^n$ sao cho không có $s+3$ điểm nào của X nằm trên một s -phẳng, $s < n$. Cho $2 \leq m_1 \leq \dots \leq m_{n+3}$ là các số nguyên dương và $Z = m_1 P_1 + \dots + m_{n+3} P_{n+3}$. Với $k = 1, \dots, n$; đặt

$$t_k = \left\lfloor \frac{\sum_{j=1}^{k+3} m_j + k - 2}{k} \right\rfloor.$$

Khi đó, $t_k \geq t_{k+1}$.

Suy ra $T_1 \geq T_n, \forall n \geq 4$.

Chứng minh: Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{j=1}^{k+3} m_j + k - 2}{k} - \frac{\sum_{j=1}^{k+4} m_j + k - 1}{k+1} \\ &= \frac{(\sum_{j=1}^{k+3} m_j + k - 2)(k+1)}{k(k+1)} \\ & \quad - \frac{(\sum_{j=1}^{k+4} m_j + k - 1)k}{k(k+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\sum_{j=1}^{k+3} m_j + k - 2)k}{k(k+1)} \\ & \quad + \frac{(\sum_{j=1}^{k+3} m_j + k - 2)}{k(k+1)} \\ & \quad - \frac{[(\sum_{j=1}^{k+3} m_j + k - 2) + (m_{k+4}k + k)]}{k(k+1)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{k+3} m_j + k - 2 - km_{k+4} - k}{k(k+1)} \\ &= \frac{(\sum_{j=1}^k m_j - km_{k+4})}{k(k+1)} \\ & \quad + \frac{\sum_{j=k+1}^{k+3} m_j - 2}{k(k+1)} > 0. \end{aligned}$$

Do đó,

$$t_k \geq t_{k+1}.$$

Suy ra với mọi $n \geq 4$, ta có $t_4 \geq t_5 \geq \dots$

$\geq t_n$. Mặt khác,

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 - \frac{\sum_{j=1}^7 m_j + 2}{4} \\ &= \frac{4(m_1 + m_2) - \sum_{j=1}^7 m_j - 2}{4} \\ &= \frac{(m_1 - m_3) + \sum_{l=4}^6 (m_2 - m_l)}{4} \\ & \quad + \frac{(m_1 - 2) + (m_1 - m_7)}{4} > 0. \end{aligned}$$

nên ta có $m_1 + m_2 > t_4$. Từ đó, $m_1 +$

$m_2 - 1 \geq t_4$. Vì $T_1 \geq m_1 + m_2 - 1$ nên $T_1 \geq t_k, \forall k \geq 4$.

Khi $k = n$, ta có $t_n = T_n$, vì vậy,

$$T_1 \geq T_n, \forall n \geq 4.$$

Định lý sau là kết quả chính của bài báo.

Định lý 2.5. Cho $X = \{P_1, \dots, P_{n+3}\}$ là một tập $n+3$ điểm phân biệt không suy biến trong $\mathbb{P}^n$ sao cho không có $s+3$ điểm nào của X nằm trên một s -

phẳng, $s < n$. Cho $2 \leq m_1 \leq \dots \leq m_{n+3}$ là các số nguyên dương và $Z = m_1 P_1 + \dots + m_{n+3} P_{n+3}$. Khi đó,

$$\text{reg}(Z) = \max\{T_j \mid j = 1, \dots, n\},$$

trong đó

$$T_j = \max\left\{\left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^j m_i + j - 2}{j} \right\rfloor \mid P_1, \dots, P_j\right\}$$

nằm trên một j -phẳng ngoại trừ trường hợp bao gồm các điều kiện: $n=3$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 + 1 = m$, không có 3 điểm nằm trên một đường thẳng, có một 2-phẳng đi qua P_6 và 3 điểm của $\{P_1, \dots, P_5\}$. Trong trường hợp này ta có $T_1 = T_2 = 2m - 1$, $T_3 = 2m$ và

$$\text{reg}(Z) = 2m - 1 \text{ hay } \text{reg}(Z) = 2m.$$

Chứng minh: Sử dụng Mệnh đề 2.1, ta thấy định lý đúng cho trường hợp $n=1, 2$. Sử dụng Mệnh đề 2.3, ta thấy định lý đúng cho trường hợp $n=3$ (bao gồm trường hợp $n=3$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 + 1 = m$ và có một 2-phẳng đi qua P_6 và 3 điểm của $\{P_1, \dots, P_5\}$). Bây giờ ta sẽ chứng minh định lý đúng khi $n \geq 4$.

$$\text{Đặt } T = \max\{T_j \mid j = 1, \dots, n\}.$$

Với $j = 4, \dots, n$; từ Bổ đề 2.4 ta có $T_1 \geq T_j$. Vì vậy,

$$T = \max\{T_j \mid j = 1, 2, 3\}.$$

Theo giả thiết, không có $s+3$ điểm của X nằm trên s -phẳng, nên có nhiều nhất $s+2$ điểm nằm trên s -phẳng. Giả sử γ là 3-phẳng đi qua các điểm $P_1, \dots, P_r$, $r \leq 5$ sao cho

$$T_3 = \left\lfloor \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_r + 1}{3} \right\rfloor.$$

$$\begin{aligned} &\text{Do } m_1 + m_2 - \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + 1}{3} \\ &= \frac{2m_1 + 2m_2 - m_3 - m_4 - m_5 - 1}{3} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{nên } m_1 + m_2 - 1 \geq$$

$$\left\lfloor \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + 1}{3} \right\rfloor \geq T_3.$$

$$\text{Từ đó, } T = \max\{T_1, T_2\}.$$

Sử dụng Mệnh đề 2.2, ta nhận được

$$\text{reg}(Z) = T.$$

Định lý 2.5 đã được chứng minh xong.

□

Tài liệu tham khảo

- Ballico E, Dumitrescu O, Postinghel E. On Segre's bound for fat points in $\mathbb{P}^n$. Journal of Pure and Applied Algebra. 2016;220(6):2307-2323.
- Catalisano MV, Trung NV, Valla G. A sharp bound for the regularity index of fat points in general position. Proceedings of The American Mathematical Society. 1993;18(3):717-724.
- Davis ED, Geramita AV. The Hilbert function of a special class of 1-dimensional Cohen - Macaulay graded algebras. The Curves Seminar at Queen's, Queen's Paper in Pure and Applied Mathematics. 1984;67:1-29.
- Fatabbi G, Lorenzini A. On a sharp bound for the regularity index of any set of fat points. Journal of Pure and Applied Algebra. 2001;161(1-2):91-111.
- Nagel U, Trok B. Segre's regularity bound for fat point schemes. Annali della Scuola normale superiore di Pisa. Classe di scienze. 2020;20(1):217-237.
- Serge B. Alcune questioni su insiemi finiti di punti in geometria algebrica. Atti del convegno internazionale di Torino. 1961;67-85.
- Thien PV. Serge bound for the regularity index of fat points in $\mathbb{P}^3$. Journal of Pure and Applied Algebra. 2000;151(2):197-214.
- Thien PV. Regularity Index of $S + 2$ Fat Points not on a Linear $(S - 1)$ -Space. Communications in Algebra. 2012;40(10):3704-3715.
- Thien PV. Lower bound for the regularity index of fat points. International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2016;109(3):745-755.
- Thien PV, Sinh TN. On the regularity index of s fat points not on a linear $(r-1)$ -space, $s \leq r + 3$. Communications in Algebra. 2016;45(10):4123-4138.
- Thien PV, Trinh TTV. An estimate of the regularity index of fat points in some cases. Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de

Rolando Eötvös Nominatae, Sectio computatorica.
2019;49:399-410.