

ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN VOLTERRA VAO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

APPLICATIONS OF THE VOLTERRA INTEGRAL EQUATION TO THE SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATION

Trần Ngọc Quốc, Phan Đức Tuấn

Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

TÓM TẮT

Lý thuyết về phương trình tích phân có mối liên hệ mật thiết với nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học. Quan trọng nhất trong số đó là phương trình vi phân và lý thuyết toán tử. Nhiều vấn đề của phương trình vi phân thường và phương trình đạo hàm riêng có thể được viết lại như là phương trình tích phân. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm có thể thu được từ kết quả tương ứng từ phương trình tích phân. Theo một cách nào đó ta có thể xem như là một mở rộng của đại số tuyến tính và tiền thân của giải tích hàm hiện đại. Đặc biệt trong việc giải các phương trình tích phân tuyến tính thì các khái niệm cơ bản của không gian vector, trị riêng và vector riêng sẽ đóng một vai trò quan trọng.

Trong bài báo này, chúng tôi đã sử dụng phương trình tích phân Volterra để giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, cấp 2 một cách tổng quát. Từ đó, chỉ ra công thức nghiệm tường minh cho trường hợp hệ số hằng.

ABSTRACT

The theory of integral equations has close relationships with many different areas of mathematics. Of these, differential equations and the operator theory are the most important. Many problems of ordinary and partial differential equations can be recasted as integral equations. The existence and uniqueness results can then be derived from the corresponding results of the integral equation. In many ways, one can view the subject of integral equations as an extension of linear algebra and a precursor of modern functional analysis. Especially, in dealing with linear integral equations, the fundamental concepts of linear vector spaces, eigenvalues and eigenfunctions will play a significant role.

In this paper, we use the Volterra integral equation to solve linear differential equations level 1, level 2 in a general way. Thus, only an explicit formula solution for the constant coefficient case will be presented.

1. Phương trình tích phân Volterra

Xét phương trình tích phân dạng

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt, \quad (a \leq x \leq b), \quad (1)$$

trong đó, $y(x)$ là hàm chưa biết, λ là tham số, $K(x,t)$ thuộc $L^2_{[a,b] \times [a,b]}$ và $f(x)$ là hàm đã biết.

Định nghĩa 1. Giá trị λ được gọi là *giá trị thường* của hạch $K(x,t)$ thuộc $L^2_{[a,b] \times [a,b]}$ nếu tồn tại hạch $H(x,t)$ thuộc $L^2_{[a,b] \times [a,b]}$ sao cho

$$H(x, t) - K(x, t) = \lambda \int_a^b H(x, u) K(u, t) du = \lambda \int_a^b K(x, u) H(u, t) du. \quad (2)$$

Khi đó, $H(x, t)$ được gọi là *hạch giải* của hạch $K(x, t)$ ứng với giá trị λ .

Định lý 1. (xem [1]) Nếu λ là giá trị thường của hạch $K(x, t)$ và $H(x, t)$ là hạch giải tương ứng thì phương trình

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt, \quad (3)$$

có nghiệm duy nhất xác định bởi

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b H(x, t) f(t) dt. \quad (4)$$

Bổ đề 1. Nếu hạch $K(x, t)$ thuộc $L^2_{[a, b] \times [a, b]}$ triệt tiêu khi $a \leq x < t \leq b$ thì chuỗi

$$K(x, t) + \lambda K^2(x, t) + \lambda^2 K^3(x, t) + \dots, \quad (5)$$

với $K^n(x, t) = \int_a^b K(x, u) K^{n-1}(u, t) du$, ($n > 1$) hội tụ đều tuyệt đối với mọi giá trị λ và tổng $H_\lambda(x, t)$ là hạch giải của hạch $K(x, t)$ ứng với giá trị λ .

Chứng minh. Bằng quy nạp ta chứng minh được rằng $\exists M > 0$ sao cho

$$|K^n(x, t)| \leq M^n \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (t \leq x, \quad n = 1, 2, \dots)$$

$$\Rightarrow \|K^n\| = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K^n(x, t)|^2 dx dt} \leq \frac{(M(b-a))^n}{n!}, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Với mỗi λ , ta có $|\lambda|^{n-1} \|K^n\| \leq M(b-a) \frac{(M(b-a)|\lambda|)^{n-1}}{n!}$.

Như vậy, chuỗi (5) được làm trội bởi một chuỗi số hội tụ nên sẽ hội tụ đều tuyệt đối.

Đặt $H_\lambda(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} K^n(x, t)$, ta có

$$\begin{aligned} \lambda \int_a^b H_\lambda(x, u) K(u, t) du &= \lambda \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} K^n(x, u) \right) K(u, t) du \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \lambda^{n-1} K^n(x, t) = H_\lambda(x, t) - K(x, t) \end{aligned}$$

Tương tự, ta có $\lambda \int_a^b K(x, u) H_\lambda(u, t) du = H_\lambda(x, t) - K(x, t)$.

Vậy, $H_\lambda(x, t)$ thỏa mãn (2) nên $H_\lambda(x, t)$ là hạch giải của hạch $K(x, t)$ ứng với giá trị λ .

Định lý 2. Phương trình tích phân (1) luôn có nghiệm duy nhất

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x H_\lambda(x, t) f(t) dt, \quad (6)$$

trong đó, $H_\lambda(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} K^n(x, t)$.

Chứng minh. Mở rộng $K(x,t) = 0$ khi $a \leq x < t \leq b$ thì phương trình (1) được viết lại thành phương trình (3). Hạch $K(x,t)$ thỏa mãn điều kiện của Bổ đề 1 nên $H_\lambda(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} K^n(x,t)$ là hạch giải của hạch $K(x,t)$ ứng với giá trị λ . Theo Định lý 1, phương trình (1) có nghiệm duy nhất xác định bởi (4).

Hơn nữa, ta có $K(x,t) = 0$ khi $a \leq x < t \leq b$ nên $H_\lambda(x,t) = 0$ khi $a \leq x < t \leq b$. Do đó

$$\int_a^b H_\lambda(x,t) f(t) dt = \int_a^x H_\lambda(x,t) f(t) dt. \quad (7)$$

Như vậy, nghiệm xác định bởi (4) được viết lại dưới dạng (6).

2. Giải phương trình vi phân cấp 1

Xét phương trình vi phân cấp 1 dạng chính tắc

$$y' = f(x, y), \quad (8)$$

với điều kiện ban đầu $y(a) = y_0$, và $f(x, y)$ là hàm liên tục theo (x, y) .

Bằng cách lấy tích phân hai vế phương trình (8) với cận từ a đến x , ta nhận được mệnh đề sau.

Mệnh đề 1. Phương trình vi phân (8) tương đương với phương trình tích phân

$$y(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y(t)) dt, \quad (a \leq x \leq b). \quad (9)$$

Chứng minh. Dành cho bạn đọc.

Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (10)$$

với điều kiện ban đầu $y(a) = y_0$ và $p(x), q(x)$ là các hàm liên tục trên $[a, b]$.

Theo Mệnh đề 1, ta có phương trình vi phân (10) tương đương phương trình tích phân

$$y(x) = y_0 + \int_a^x q(t) dt - \int_a^x p(t)y(t) dt, \quad (a \leq x \leq b). \quad (11)$$

Đặt $f(x) = y_0 + \int_a^x q(t) dt$; $K(x,t) = -p(t)$, $(a \leq t \leq x \leq b)$, khi đó phương trình (11) có dạng phương trình (1) với $\lambda = 1$. Theo Định lý 2, thì phương trình vi phân (10) có nghiệm duy nhất cho bởi (6).

Nói riêng, khi $p(x) = m$ ta có

$$K(x,t) = -m, \quad K^2(x,t) = (-m)^2(x-t), \quad K^n(x,t) = (-m)^n \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$H(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} K^n(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-m)^n \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} = -me^{m(x-t)}.$$

Vậy, nghiệm duy nhất của phương trình vi phân (10) là

$$y(x) = f(x) - me^{-mx} \int_a^x e^{mt} f(t) dt,$$

trong đó, $f(x) = y_0 + \int_a^x q(t) dt$.

3. Giải phương trình vi phân cấp 2

Xét phương trình vi phân cấp 2 dạng

$$y'' = f(x, y), \quad (12)$$

với điều kiện ban đầu $y(a) = y_0, y'(a) = y_1$, và $f(x, y)$ là hàm liên tục theo (x, y) .

Theo Mệnh đề 1, ta có $y'(x) = y_1 + \int_a^x f(t, y(t)) dt$, tiếp tục lấy tích phân hai vế, ta được

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + y_1(x-a) + \int_a^x \int_a^s f(t, y(t)) dt ds \\ &= y_0 + y_1(x-a) + s \int_a^s f(t, y(t)) dt \Big|_a^x - \int_a^x s f(s, y(s)) ds \\ &= y_0 + y_1(x-a) + \int_a^x (x-t) f(t, y(t)) dt. \end{aligned}$$

Như vậy, ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 2. Phương trình vi phân (12) tương đương với phương trình tích phân

$$y(x) = y_0 + y_1(x-a) + \int_a^x (x-t) f(t, y(t)) dt, \quad (a \leq x \leq b). \quad (13)$$

Chứng minh. Dành cho bạn đọc.

Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad (14)$$

với điều kiện ban đầu $y(a) = y_0, y'(a) = y_1$, và $p(x), q(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên $[a, b]$.

Theo Mệnh đề 2, thì phương trình (14) tương đương với phương trình tích phân

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + [p(a)y_0 + y_1](x-a) + \int_a^x (x-t)g(t)dt \\ &\quad + \int_a^x [(x-t)(p'(t) - q(t)) - p(t)]y(t)dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Đặt

$$\begin{aligned} f(x) &= y_0 + [p(a)y_0 + y_1](x-a) + \int_a^x (x-t)g(t)dt, \\ K(x, t) &= (x-t)(p'(t) - q(t)) - p(t), \quad (a \leq t \leq x \leq b). \end{aligned}$$

Khi đó, phương trình (15) có dạng phương trình tích phân (1) với $\lambda = 1$. Theo Định lý 2, thì phương trình vi phân (14) có nghiệm duy nhất cho bởi (6).

Một số trường hợp riêng của phương trình (14):

- Khi $p(x) \equiv 0, q(x) = m^2, (m > 0)$ thì hạch giải $H(x, t) = m \sin m(t - x)$ nên nghiệm duy nhất của phương trình (14) là

$$y(x) = f(x) + m \int_a^x \sin m(t - x) f(t) dt,$$

trong đó, $f(x) = y_0 + y_1(x - a) + \int_a^x (x - t)g(t)dt$.

- Khi $p(x) \equiv 0, q(x) = -m^2, (m > 0)$ thì hạch giải $H(x, t) = m \sinh m(x - t)$ nên nghiệm duy nhất của phương trình (14) là

$$y(x) = f(x) + m \int_a^x \sinh m(x - t) f(t) dt,$$

trong đó, $f(x) = y_0 + y_1(x - a) + \int_a^x (x - t)g(t)dt$.

- Khi $p(x) = m, q(x) \equiv 0$ thì hạch giải $H(x, t) = -me^{m(t-x)}$ nên nghiệm duy nhất của phương trình (14) là

$$y(x) = f(x) - me^{-mx} \int_a^x e^{mt} f(t) dt,$$

trong đó, $f(x) = y_0 + (my_0 + y_1)(x - a) + \int_a^x (x - t)g(t)dt$.

4. Kết luận

Bài báo đã xây dựng được công thức nghiệm cho phương trình tích phân Volterra và đã chuyển một phương trình vi phân với các điều kiện ban đầu thành một phương trình tích phân duy nhất. Từ kết quả của phương trình tích phân chúng tôi đã đưa ra công thức nghiệm cho phương trình vi phân. Tuy nhiên, việc xác định hạch giải trong trường hợp tổng quát là không đơn giản. Đó là vấn đề mở mà chúng tôi tiếp tục phát triển sau này. Đối với một số trường hợp riêng chúng tôi đã chỉ ra hạch giải và do đó đã đưa ra công thức nghiệm tường minh của phương trình vi phân.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. P.Hall, F.R.S and F.Smithies, *Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
- [2]. Hoàng Tuy, *Hàm Thực và giải tích hàm*, Tái bản lần 3, NXB ĐHQG Hà Nội, 2005.
- [3]. A. D. Polyanin and A. V. Manzhirov, *Handbook of Integral Equations*, CRC Press, Boca Raton, 1998.
- [4]. L. Debnath and D. Bhatta, *Integral transforms and their applications*, second edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2007.