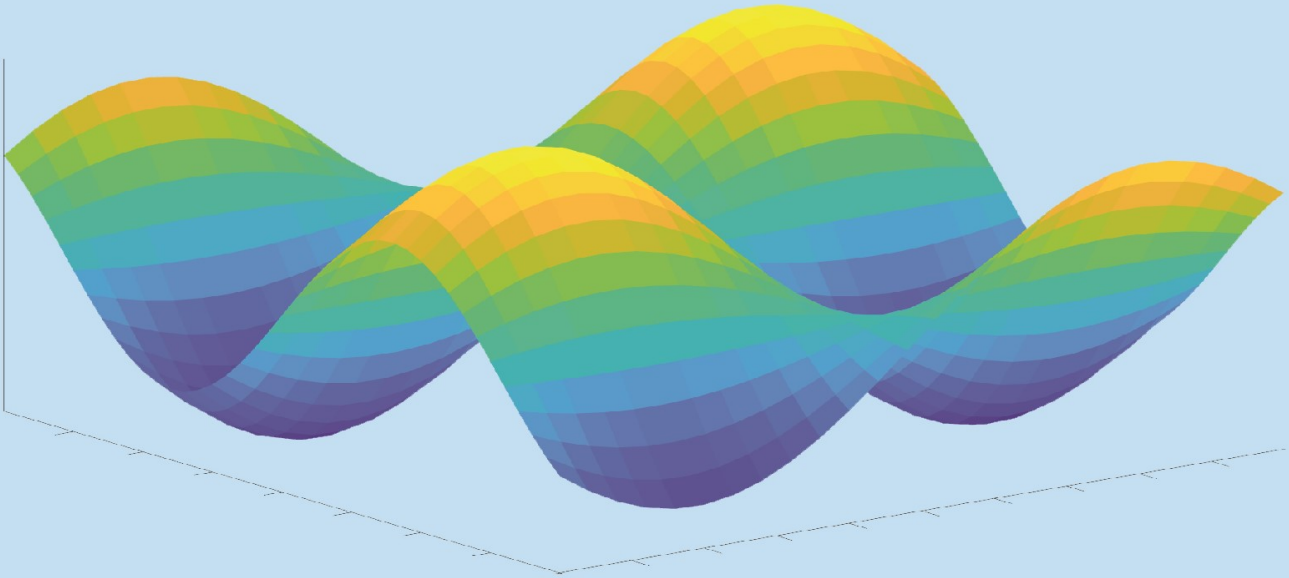
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM QUÝ MƯỜI

GIÁO TRÌNH

TỐI ƯU PHI TUYẾN



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Phạm Quý Mười

Giáo trình

TỐI ƯU PHI TUYẾN

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
2024

LỜI NÓI ĐẦU

Tối ưu phi tuyến là một lĩnh vực đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu các vấn đề về cực trị, có nhiều ứng dụng trong đời sống thực tế cũng như trong các ngành khoa học. Tuy nhiên phải đến những năm 30, 40 của thế kỷ XX, tối ưu phi tuyến mới được hình thành với tư cách là một lý thuyết độc lập với nhiều hướng nghiên cứu khác nhau và ngày càng được ứng dụng nhiều hơn trong cuộc sống nhờ sự phát triển của công nghệ thông tin, đặc biệt là máy tính.

Giáo trình *Tối ưu phi tuyến* nhằm giới thiệu một cách có hệ thống về bài toán tối ưu, cách phân loại và một số các kết quả cơ bản về điều kiện cần và đủ cho nghiệm của bài toán tối ưu. Nội dung nghiên cứu trong giáo trình tập trung xây dựng lý thuyết cơ bản cho bài toán tối ưu trơn, tức là hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc khả vi đến cấp cần thiết. Ngoài ra, giáo trình cũng dành một chương để trình bày lý thuyết cơ bản cho bài toán tối ưu không trơn. Giáo trình được trình bày trong bốn chương khái quát những vấn đề chung nhất, cơ bản nhất về bài toán tìm cực trị của hàm số.

Chương 1: **Một số kiến thức của giải tích và đại số**

Chương này trình bày các khái niệm cơ bản và các ký hiệu được sử dụng trong giáo trình gồm: một số khái niệm về giá trị riêng, tập lồi, hàm lồi, hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^n$, định lý Taylor, định lý về giá trị trung gian cũng như các định lý tách,... tạo cơ sở, tiền đề cho việc tiếp cận những kiến thức ở các chương sau.

Chương 2: **Lý thuyết cơ bản về bài toán tối ưu**

Chương này trình bày một số kết quả cơ bản về bài toán tối ưu tổng quát, bao gồm điều kiện tồn tại nghiệm, các điều kiện cần và đủ cho nghiệm của bài toán tối ưu, các tính chất quan trọng về cực trị của hàm lồi. Ngoài ra, chương này cũng trình bày chi tiết giải thuật giảm nhanh nhất với các phương pháp xác định kích thước bước khác nhau.

Chương 3: **Bài toán tối ưu có điều kiện cho bởi phương trình và bất phương trình**

Chương này trình bày các kết quả về điều kiện cần, điều kiện đủ cho bài toán cực trị có điều kiện cho bởi phương trình và bất phương trình. Đặc biệt, giáo trình tập trung vào phương pháp nhân tử Lagrange và điều

kiện KKT cho bài toán tối ưu có điều kiện cho bởi phương trình và bất phương trình. Chương này cũng trình bày phương pháp Lagrange tăng cường để tìm nghiệm số cho bài toán tối ưu có điều kiện cho bởi phương trình.

Chương 4: **Bài toán tối ưu không trơn**

Chương này sẽ giới thiệu bài toán tối ưu không trơn và chỉ tập trung vào một dạng cơ bản, thường xuất hiện trong chỉnh hóa bài toán ngược. Trong chương này, giáo trình trình bày một số kết quả cơ bản về sự tồn tại duy nhất nghiệm, về điều kiện cần bậc nhất và một vài giải thuật được phát triển gần đây để giải bài toán này.

Giáo trình được biên soạn bám sát đề cương môn học, tập trung vào các kiến thức cơ bản và các kỹ năng cần thiết theo chuẩn đầu ra của môn học. Bên cạnh đó, nội dung giáo trình chú trọng đến các khái niệm cơ bản, các điều kiện cần và đủ quan trọng, thường dùng và các phương pháp tìm nghiệm số cơ bản cho bài toán tối ưu tự do và bài toán tối ưu có điều kiện, phương pháp giảm nhanh nhất và phương pháp Lagrange tăng cường. Để có một nghiên cứu sâu và đầy đủ hơn, các bạn học viên cao học có thể tham khảo thêm một số nguồn tài liệu tham khảo được trích dẫn trong giáo trình này.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong công tác biên soạn, tham khảo nhiều tài liệu và trình bày một cách có hệ thống để giúp bạn đọc dễ dàng tiếp cận hơn, song giáo trình được biên soạn lần đầu sẽ khó tránh khỏi sai sót. Tác giả rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của bạn đọc để giáo trình được hoàn thiện hơn trong lần tái bản sau. Mọi góp ý xin được gửi về địa chỉ: Phạm Quý Mười, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng.

Xin trân trọng cảm ơn./.

Đà Nẵng, tháng ... năm 2024

Tác giả

Danh mục các ký hiệu

$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	Tập hợp các số thực
$\mathbb{C}$	Tập hợp các số phức
$\mathbb{K}$	Một trường số, thông thường $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclid n chiều $\mathbb{R}^n$
Ω	Tập mở khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$
$C^k(\Omega)$	Không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp k trên Ω
$D(f)$	Miền xác định của hàm f
$R(f)$	Miền giá trị của hàm f
$\|x\|$	Chuẩn của véctơ $x \in \mathbb{R}^n$
$\|A\|$	Chuẩn của ma trận A
A^T	Ma trận chuyển vị của A
I	Toán tử đơn vị
inf	Cận dưới đúng
sup	Cận trên đúng

MỤC LỤC

Lời nói đầu 3
Danh mục các ký hiệu 5
Chương 1. Một số kiến thức cơ bản của giải tích và đại số 9
1.1. Ma trận 9
1.2. Không gian $\mathbb{R}^n$ 10
1.3. Giá trị riêng và dạng toàn phương 13
1.4. Hàm số nhiều biến số 15
1.5. Định lý Taylor 19
1.6. Hàm lồi 19
1.7. Các định lý tách 22
1.8. Cực điểm 23
Bài tập Chương 1 24
Chương 2. Lý thuyết cơ bản về bài toán tối ưu 26
2.1. Phân loại bài toán tối ưu 26
2.2. Điều kiện cần cho nghiệm của bài toán tối ưu 27
2.3. Điều kiện đủ cho nghiệm của bài toán tối ưu 34
2.4. Cực tiểu và cực đại của hàm lồi 35
2.5. Giải thuật cho bài toán tối ưu tự do 37
Bài tập Chương 2 58
Chương 3. Bài toán tối ưu có điều kiện cho bởi phương trình và bất phương trình 61
3.1. Các khái niệm cơ bản 61
3.2. Điều kiện tối ưu bậc nhất 63
3.3. Điều kiện tối ưu cấp hai 74
3.4. Bài toán đối ngẫu 80
3.5. Giải thuật cho bài toán tối ưu có điều kiện cho bởi phương trình và bất phương trình 81
Bài tập Chương 3 90
Chương 4. Bài toán tối ưu không trơn 94
4.1. Một số khái niệm cơ bản 94
4.2. Sự tồn tại nghiệm và điều kiện cần cho nghiệm của bài toán 95

4.3. Giải thuật giảm kiểu gradient 96
4.4. Giải thuật cải tiến của Nesterov 103
4.5. Một số ứng dụng 107
Bài tập Chương 4 110
Chương 5. Chương trình Matlab và một số ví dụ minh họa 114
5.1. Chương trình Matlab cho bài toán tối ưu bậc hai 114
5.2. Chương trình Matlab cho bài toán tối ưu tổng quát 115
5.3. Một số ví dụ minh họa 117
Tài liệu tham khảo 124