PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ HÓA XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ, HÌNH DẠNG VẬT TÁN XẠ TRONG MÔI TRƯỜNG KHÔNG THUẦN NHẤT $R^d\,(d=2,3)$

THE FACTORIZATION METHOD THAT DETERMINES THE POSITION AND SHAPE OF THE SCATTERERS IN THE INHOMOGENEOUS SPACE $R^d\,(d=2,3)$

PHẠM QUÝ MƯỜI
Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

TÓM TẮT
Mục tiêu của bài báo này là trình bày phương pháp nhân tử hóa xác định vị trí, hình dạng của dị vật tán tán xạ trong môi trường không thuần nhất $R^d\,(d=2,3)$. Từ đó áp dụng phương pháp vào giải số một số bài toán với dữ liệu giả định.

ABSTRACT
The aim of this paper is to present the factorization method to determine the position and shape of the scatterers in the inhomogeneous space $R^d\,(d=2,3)$. This method is used in the numerical implementation for some numerical examples with synthetic data.

1. Đặt vấn đề

Trước hết chúng ta phát biểu lại bài toán tán xạ trong môi trường không thuần nhất: Cho môi trường không thuần nhất $\Omega \subset R^d$ là một tập mở, bị chặn sao cho phần bù của nó là tập liên thông. Chúng ta giả sử chỉ số tán xạ của môi trường $n \in C^2(R^d)$ là hàm giá trị phức với $\operatorname{Re} n \geq 0, \operatorname{Im} n \geq 0$ và $n=1$ ngoài Ω. Cho $k>0$ và Φ tương ứng là số sóng và nghiệm cơ bản của phương trình Helmholtz. Cho sóng tới $u^{inc}=e^{-ik\hat{\theta}.x}$, với $\hat{\theta} \in S^{d-1}$ cố định, tùy ý. Bài toán tán xạ thuận là xác định hàm $u^s = u^s(x,\hat{\theta}) \in C^2(R^d)$ sao cho $u := u^s + u^{inc}$ thỏa mãn

$$\Delta u + k^2 nu = 0 \text{ trong } R^d, \tag{1}$$

và u^s thỏa mãn điều kiện Sommerfeld

$$\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s = O(r^{-(d+1)/2}),\ r = |x| \to \infty. \tag{2}$$

Trong [1], người ta đã chỉ ra rằng bài toán tán xạ trên tương đương với phương trình tích phân Lippmann-Schwinger

$$u(x) - k^2 \int_\Omega q(y)u(y)\Phi(x,y)dy = u^{inc}(x),\ x \in \overline{\Omega}\ (q = n-1), \tag{3}$$

hoặc $u - Lu = u^{inc}$ với

$$Lu(x) := k^2 \int_{\Omega} q(y)u(y)\Phi(x,y)dy,\ x \in \overline{\Omega}. \tag{4}$$

Sóng tán xạ u^s, dạng trường xa u_∞ và toán tử trường xa F được xác định bởi các phương trình sau

$$u^s(x,\hat{\theta}) = k^2 \int_{\Omega} q(y)u(y)\Phi(x,y)dy,\ x \in R^d, \tag{5}$$

$$u_\infty(\hat{x},\hat{\theta}) = \frac{k^2}{4\pi}\int_{\Omega} q(y)u(y,\hat{\theta})e^{-ik\hat{x}.y}dy,\ \hat{x} \in S^{d-1}, \tag{6}$$

$$F\psi(\hat{x}) = \int_{S^{d-1}} u_\infty(\hat{x},\hat{\theta})\psi(\hat{\theta})ds(\hat{\theta}),\ \hat{x} \in S^{d-1}. \tag{7}$$

Bài toán tán xạ ngược là bài toán xác định giá của hàm q (tức là Ω: vị trí và hình dạng của dị vật) từ dữ liệu $u_\infty(\hat{x},\hat{\theta}),\ \hat{x},\hat{\theta} \in S^{d-1}$.

Phương pháp nhân tử hóa, là sự mở rộng của phương pháp MUSIC được Kirsch trình bày trong [2, 3]. Trong 2, chúng tôi trình bày lại phương pháp nhân tử hóa đối với bài toán tán xạ ngược trong môi trường không thuần nhất. Trong 3, chúng tôi trình bày các ví dụ giải số với dữ liệu giả định trong không gian R^2.

2. Phương pháp nhân tử hóa

Trước hết, chúng ta định nghĩa toán tử $S : L^2(\Omega) \to L^2(S^{d-1})$ với toán tử liên hợp $S^* : L^2(S^{d-1}) \to L^2(\Omega)$ bởi

$$S\phi(\hat{x}) := \int_{\Omega} \phi(y)e^{-ik\hat{x}.y}dy, \quad \hat{x} \in S^{d-1}, \tag{8}$$

$$S^*\psi(y) = \int_{S^{d-1}} \psi(\hat{x})e^{ik\hat{x}.y}ds(\hat{x}), \quad y \in \Omega. \tag{9}$$

Khi đó, đối với toán tử F, chúng ta cũng có kết quả sau

Định lý 1. Cho toán tử trường xa $F : L^2(S^{d-1}) \to L^2(S^{d-1})$ xác định bởi (7). Khi đó

$$F = STS^* \tag{10}$$

với S và S^* tương ứng xác định bởi (8) và (9) và $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ được xác định bởi

$$T\phi := k^2 q(I-L)^{-1}\phi, \phi \in L^2(\Omega). \tag{11}$$

Chứng minh. Thế (5) vào (6) và thay đổi thứ tự lấy tích phân ta nhận được

$$F\psi(\hat{x}) = k^2\int_{\Omega} q(y)e^{-ik\hat{x}.y}dy \underbrace{\int_{S^{d-1}} u(y,\hat{\theta})\psi(\hat{\theta})ds(\hat{\theta})}_{\tilde{u}(y)}$$

$$= k^2\int_{\Omega} q(y)\tilde{u}(y)e^{-ik\hat{x}.y}dy = k^2 S(q\tilde{u})(\hat{x}).$$

Mặt khác, ta có

$$\tilde{u}(x) - L\tilde{u}(x) = \int_{S^{d-1}} u^{inc}(x,\hat{\theta})\psi(\hat{\theta})ds(\hat{\theta}) = \int_{S^{d-1}} e^{ik\hat{\theta}.x}\psi(\hat{\theta})ds(\hat{\theta}) = S^*\psi(x),$$

nghĩa là $\tilde{u} = (I-L)^{-1}S^*\psi$ và vì thế

$$F\psi = k^2 S(q(I-L)^{-1}S^*\psi) = STS^*\psi.$$

Tiếp theo, chúng ta cũng đưa ratiêu chuẩn để kiểm tra một điểm $z \in R^d$ có thuộc Ω hay không. Với mỗi $z \in R^d$ ta định nghĩa hàm $\varphi_z \in L^2(S^{d-1})$ như sau

$$\varphi_z(\hat{x}) := e^{-ik\hat{x}.z}, \hat{x} \in S^{d-1}.$$

Định lý 2. Với bất kỳ $z \in R^d$ ta có

$$z \in \Omega \Leftrightarrow \varphi_z \in R(S). \tag{12}$$

Chứng minh. Trước hết, ta giả sử $z \in \Omega$. Chọn một hàm tùy ý $v \in C^2(\overline{\Omega})$ với

$v = \Phi(.,z)$ trên $\partial\Omega$ và $\partial v / \partial n = \partial\Phi(.,z)/\partial n$ trên $\partial\Omega$.

Đặt $\phi := -\Delta v - k^2 v.$ Khi đó, từ định lý biểu diễn Green, với $x \in \Omega$ ta có

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{\partial\Omega} \left\{ \Phi(x,y)\partial v(y)\partial n(y) - v(y)\partial\Phi(x,y)\partial n(y) \right\} ds(y) \\ &\quad - \int_{\Omega} \{\Delta v(y) + k^2 v(y)\}\Phi(x,y)dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \left\{ \Phi(x,y)\partial\Phi(y,z)\partial n(y) - \Phi(y,z)\partial\Phi(x,y)\partial n(y) \right\} ds(y) + \int_{\Omega} \phi(y)\Phi(x,y)dy. \end{aligned}$$

Tích phân đầu tiên bằng không vì các hàm $\Phi(.,x)$ và $\Phi(.,z)$ đều thỏa mãn điều kiện Sommerfeld. Điều này suy ra

$$v(x) = \int_{\Omega} \phi(y)\Phi(x,y)dy, x \in \Omega.$$

Hơn nữa, công thức này cũng chứng tỏ rằng v có thể thác ttriển được thành một hàm $v \in C^1(R^d)$ thỏa mãn điều kiện Sommerfeld và trùng với $\Phi(.,z)$ trên $\partial\Omega$. Từ tính duy nhất của bài toán Dirichlet ngoài suy ra $v = \Phi(.,z)$ trong $R^d \setminus \Omega$ và vì thế $S\phi = \Phi^\infty(.,z) = \varphi_z$. Điều này chứng tỏ rằng $\varphi_z \in R(S)$.

Bây giờ, cho $z \notin \Omega$ và giả sử ngược lại, tồn tại $\phi \in L^2(\Omega)$ sao cho $S\phi = \varphi_z = \Phi^\infty(.,z)$ trên S^{d-1}. Khi đó

$$\int_{\Omega} \phi(y)\Phi(x,y)dy = \Phi(x,z), \text{ với mọi } x \text{ nằm trong phần ngoài của } \Omega \cup \{z\}.$$

Điều này mâu thuẫn vì vế trái của phương trình là một hàm thuộc $C^1(R^d)$ và là nghiệm của phương trình Helmholtz, trong khi vế phải là một hàm có điểm kỳ dị tại $z \notin \Omega$.

Vậy định lý được chứng minh.

Chúng ta thấy rằng, định lý trên cho phép xác định Ω thông qua miền giá trị $R(S)$ của S. Bước tiếp theo chúng ta phải biểu diễn miền giá trị của S qua toán tử trường xa F. Để làm điều đó, chúng ta nhắc lại một vài định nghĩa. Cho $\mathbf{X}$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ và $A: \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ là một toán tử tuyến tính bị chặn. Khi đó, phần thực và phần ảo của toán tử A được xác định tương ứng bởi

$$\operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + A^*), \qquad \operatorname{Im} A = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Khi đó, $\operatorname{Re} A$ và $\operatorname{Im} A$ là các toán tử tuyến tính tự liên hợp và

$$\langle(\operatorname{Re}A)\psi,\psi\rangle = \operatorname{Re}\langle A\psi,\psi\rangle, \langle(\operatorname{Im}A)\psi,\psi\rangle = \operatorname{Im}\langle A\psi,\psi\rangle.$$

Hơn nữa, chúng ta định nghĩa toán tử tự liên hợp, không âm $|\operatorname{Re}A|$ thông qua biểu diễn phổ của A. Giả sử

$$\operatorname{Re}A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda \text{ chúng ta đặt } |\operatorname{Re}A| = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|\, dE_\lambda.$$

Tương tự, nếu $A: \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ là toán tử tự liên hợp, không âm, người ta định nghĩa "căn bậc hai" $A^{1/2}$ của A là

$$A^{1/2} = \int_0^{+\infty} \sqrt{\lambda} dE_\lambda \text{ nếu } A = \int_0^{+\infty} \lambda dE_\lambda.$$

Với các ký hiệu và định nghĩa trên, chúng ta có các định lý sau

Định lý 3. Cho $\mathbf{X}$ và $\mathbf{Y}$ là hai không gian Hilbert, $F: \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}, S: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ và $D: \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ là các toán tử tuyến tính bị chặn sao cho

$$F = SDS^*. \tag{13}$$

Giả thiết rằng

1. S là toán tử compact với miền giá trị trù mật trong $\mathbf{Y}$.
2. Tồn tại $\delta \in C, |\delta| = 1$, sao cho toán tử $\operatorname{Re}(\delta D)$ là coercive, tức là tồn tại $c > 0$ sao cho $\operatorname{Re}[\delta\langle D\phi,\phi\rangle] \geq c\|\phi\|^2$ với mọi $\phi \in \mathbf{X}$.

Khi đó, toán tử $F_\sharp := \operatorname{Re}(\delta F)$ là toán tử dương và miền giá trị của S và $F_\sharp^{1/2}$ trùng nhau.

Chứng minh. Xem chứng minh trong [3], Định lý 4.1.

Định lý 4. Cho $\mathbf{X}$ và $\mathbf{Y}$ là hai không gian Hilbert, $F: \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}, S: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ và $D: \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ là các toán tử tuyến tính bị chặn sao cho

$$F = SDS^*. \tag{14}$$

Giả thiết rằng

1. S là toán tử compact với miền giá trị trù mật trong $\mathbf{Y}$.
2. $\operatorname{Re}D$ có dạng $\operatorname{Re}D = C + K$, với K là toán tử compact và C hoặc $-C$ là toán tử tự liên hợp và coercive.
3. $\operatorname{Im}D$ là toán tử dương trên không gian con đóng $\tilde{X} := \overline{S^*(Y)}$, tức là $\operatorname{Im}\langle D\phi,\phi\rangle > 0$ với mọi $\phi \in \tilde{X}, \phi \neq 0$.

Khi đó, toán tử $F_\sharp := |\operatorname{Re}F| + \operatorname{Im}F$ là toán tử dương và miền giá trị của S và $F_\sharp^{1/2}$ trùng nhau.

Chứng minh. Xem chứng minh trong [3], Bổ đề 4.5.

Chúng ta quay lại bài toán tán xạ ngược: xác định giá của hàm q khi biết toán tử trường xa $F(\hat{x},\hat{\theta}), \hat{x},\hat{\theta} \in S^{d-1}$. Ta có $F = STS^*$ với $T\phi = k^2 q(I-L)^{-1}\phi, \phi \in L^2(\Omega)$ và S là hàm sóng Herglotz.

Viết $(I-L)^{-1}$ dưới dạng $(I-L)^{-1} = I + K$ với $K = (I-L)^{-1} - I = (I-L)^{-1}L$. Khi đó nhân tử hóa của $F = STS^*$ có dạng $F\psi = k^2 S(q + qK)S^*$. Ta thấy F có dạng như trong Định lý 4 với $C\phi = k^2(\operatorname{Re}q)\phi$ và $K\phi = k^2(\operatorname{Re}qK)\phi$. Để áp dụng được bổ đề ta cần chỉ ra C hoặc $-C$ là toán tử tự liên hợp và coercive và $\operatorname{Im} D$ là toán tử dương với $D = k^2(q+qK) = k^2 q(I-L)^{-1}$ trên $\overline{S^*(L^2(S^{d-1}))}$. Dễ thấy, toán tử C tự liên hợp và coercive nếu tồn tại $q_0 > 0$ sao cho $\operatorname{Re} q(x) q_0, \forall x \in \overline{\Omega}$. Để chứng minh $\operatorname{Im} D$ là toán tử dương, ta sử dụng bổ đề sau.

Bổ đề 1. Cho $q \in C^2(\Omega)$ sao cho tồn tại $q_0 > 0$ với $\operatorname{Re} q(x) q_0, \operatorname{Im} q(x) 0, \forall x \in \Omega$ và k không là giá trị riêng. Khi đó

$$\operatorname{Im}(Dv, v) > 0, \forall v \in \overline{S^*(L^2(S^{d-1}))}, v \neq 0,$$

trong đó $D = k^2(q+qK) = k^2 q(I-L)^{-1}$.

Chứng minh. Cho $v \in S^*(L^2(S^{d-1}))$. Khi đó v trơn và $\Delta v + k^2 v = 0$ trong $\overline{\Omega}$. Đặt $\omega := (I-L)^{-1} v$ và

$$u(x) := k^2 \int_\Omega q(y)\omega(y)\Phi(x,y)dy, x \in R^d,$$

chúng ta có $v = \omega - L\omega = \omega - u$ trên $\overline{\Omega}$. Vì thế

$$(Dv, v) = k^2 \int_\Omega q\omega\bar{v}dx = k^2 \int_\Omega q|\omega|^2 dx - k^2 \int_\Omega q\omega\bar{u}dx.$$

Chúng ta nhận thấy rằng $\Delta u + k^2 u = -k^2 q\omega$, vì thế từ định lý Green ta có

$$(Dv, v) = k^2 \int_\Omega q|\omega|^2 dx + \int_\Omega \bar{u}(\Delta u + k^2 u)dx$$

$$= k^2 \int_\Omega q|\omega|^2 dx + \int_\Omega \left[k^2 |u| - |\nabla u|^2\right] dx + \int_{\partial\Omega} \bar{u}\frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Vì $u \in C^1(R^d)$ nên

$$\operatorname{Im}(Dv, v) = k^2 \int_\Omega (\operatorname{Im} q)|\omega|^2 dx + \operatorname{Im} \int_{|x|=R} \bar{u}\frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Tích phân cuối hội tụ về $ik\int_{S^{d-1}} |u_\infty|^2 ds$ khi $R \to \infty$. Vì thế

$$\operatorname{Im}(Dv, v) = k^2 \int_\Omega (\operatorname{Im} q)|\omega|^2 dx + k\int_{S^{d-1}} |u_\infty|^2 ds 0.$$

Từ tính chất trù mật, ta có

$$\operatorname{Im}(Dv, v) = k^2 \int_\Omega (\operatorname{Im} q)|\omega|^2 dx + k\int_{S^{d-1}} |u_\infty|^2 ds, \forall v \in \overline{S^*(L^2(S^{d-1}))} \quad (15)$$

vì toán tử $(I-L)^{-1}$ bị chặn trong $L^2(\Omega)$ và $\omega \mapsto u_\infty$ bị chặn từ $L^2(\Omega)$ vào $C(S^{d-1})$. Đặc biệt ta có $\operatorname{Im} D$ là toán tử không âm.

Bây giờ cho $v \in \overline{S^*(L^2(S^{d-1}))}$ sao cho $\operatorname{Im}(Dv, v) = 0$. Khi đó $u_\infty = 0$. Từ Bổ đề Rellich ta có $u = 0$ trong $R^d \setminus \Omega$. Vì $u \in C^1(R^d)$ nên $\omega - v \in C^1(\overline{\Omega})$. Từ định nghĩa của hàm ω ta có

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \text{vµ} \quad \Delta\omega + k^2(1+q)\omega = (\Delta\omega + k^2\omega) + k^2 q\omega = 0 \text{ trong } \Omega$$

theo nghĩa cổ điển, còn với $v \in \overline{S^*(L^2(S^{d-1}))}$ phương trình đúng theo nghĩa suy rộng. Điều này suy ra từ tính chất trù mật. Do đó, (v, ω) là nghiệm của bài toán giá trị riêng. Theo giả thiết của bổ đề, k không là giá trị riêng nên ta có $v = 0, \omega = 0$.

Vậy bổ đề được chứng minh.

Từ các Định lý 4 và Bổ đề 1, ta có định lý sau

Định lý 5. Cho $q \in C^2(\Omega)$ sao cho tồn tại $q_0 > 0$ với $\operatorname{Re} q(x) \geq q_0$, $\operatorname{Im} q(x) \geq 0$,

$\forall x \in \Omega$ và k không là giá trị riêng. Khi đó, với bất kỳ điểm $z \in R^d$ ta có

$$z \in \Omega \Leftrightarrow \varphi_z \in R(F_\sharp^{1/2}), \tag{16}$$

trong đó $\varphi_z(\hat{x}) = e^{-ikz.\hat{x}}, \hat{x} \in S^{d-1}$, và $F_\sharp = |\operatorname{Re} F| + \operatorname{Im} F$ là toán tử dương.

Từ phương trình (15), ta thấy $\operatorname{Im} D$ là toán tử coercive nếu tồn tại $q_0 > 0$ sao cho $\operatorname{Im} q(x) \geq q_0, \forall x \in \Omega.$ Do đó, trong trường hợp này, áp dụng Định lý 3 với $\delta = -i$ chúng ta có định lý sau

Định lý 6. Cho $q \in C^2(\Omega)$ sao cho tồn tại $q_0 > 0$ với $\operatorname{Im} q(x) q_0, \forall x \in \Omega.$ Khi đó, với bất kỳ điểm $z \in R^d$ ta có

$$z \in \Omega \Leftrightarrow \varphi_z \in R(F_\sharp^{1/2}), \tag{17}$$

trong đó $\varphi_z(\hat{x}) = e^{-ikz.\hat{x}}, \hat{x} \in S^{d-1}$, và $F_\sharp = \operatorname{Im} F.$

3. Các ví dụ giải số

Trong phần này, chúng ta xét các ví dụ áp dụng phương pháp nhân tử hóa vào các bài toán giả định cụ thể. Các ví dụ minh họa đều thuộc vào bài toán tán xạ ngược trong R^2. Gọi $\{\lambda_i, V_i, U_i) : n \in N\}$ là hệ kỳ dị của $F_\sharp$. Từ Định lý Picard, ta có

$$z \in \Omega \Leftrightarrow \Phi_z \in R(F_\sharp^{1/2}) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |(\Phi_z, U_i)|^2 \lambda_i < \infty.$$

Chúng ta định nghĩa hàm

$$W(z) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |(\Phi_z, U_i)|^2 \lambda_i \right]^{-1}, z \in R^2.$$

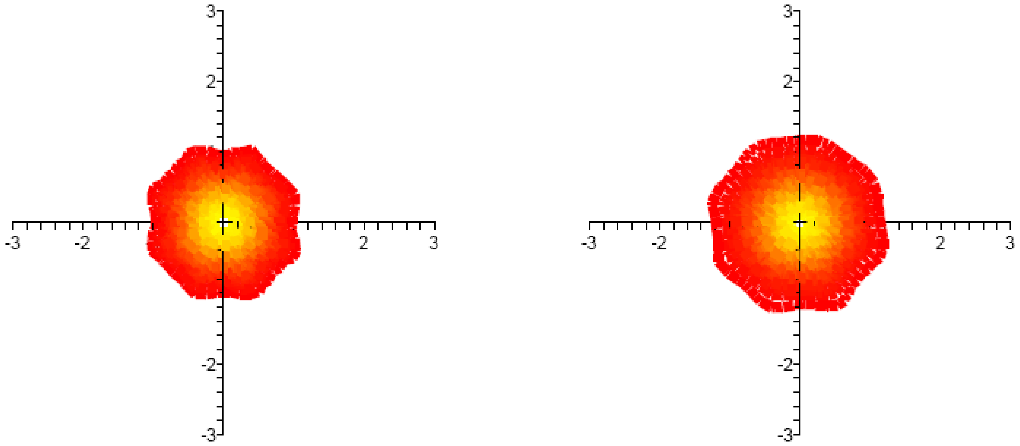
Khi đó, ta có $z \in \Omega \Leftrightarrow W(z) > 0.$

Trong các ví dụ giải số, chúng ta xét giá của q là đường tròn tâm tại gốc tọa độ, bán kính $r = 1$ và q có giá trị hằng trên đường tròn. Để thỏa mãn giả thiết về tính liên tục của hàm q ta có thể làm trơn hóa hàm q. Tuy nhiên điều này thì không cần thiết trong giải số của chúng ta. Để giải bài toán thuận ta dùng phương pháp phương trình tích phân (xem [4]) với miền $G := [-2, 2] \times [-2, 2].$ Sau khi giải số bài toán thuận chúng ta tính dạng trường xa $u_\infty(x_i, x_j)$ với $x_i \in S^{d-1}, i, j = 1..16$ ứng với $M = 16$ điểm chia đều trên đường tròn đơn vị và số sóng cố định $k = 1$ (về công thức tính gần đúng dạng trường xa xem [4]). Từ dữ liệu hữu hạn này, ta có $F = [u_\infty(x_i, x_j)]$ và tính được ma trận tương ứng với $F_\sharp = \operatorname{Im} F$ hoặc $F_\sharp = |\operatorname{Re} F| + \operatorname{Im} F.$ Chúng ta giải số thu được hệ kỳ dị $\{(\lambda_i, V_i, U_i) : i = 1,.., M\}$ của ma trận $F_\sharp$ và định nghĩa hàm

$$W_M(z) = \left[\sum_{i=1}^{M} |(\Phi_z, U_i)|^2 \lambda_i \right]^{-1}, z \in R^2,$$

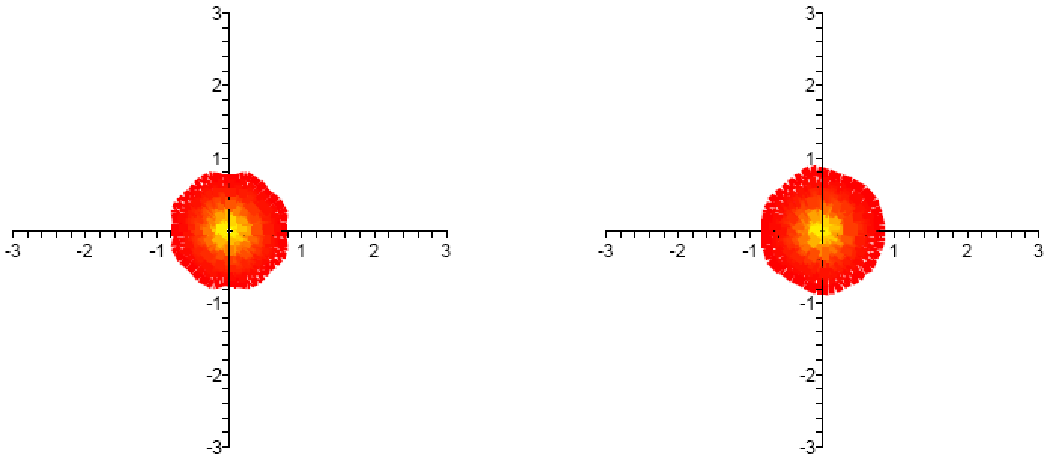
trong đó $\Phi_z = [e^{-ikx_1.z}, e^{-ikx_2.z}, ..., e^{-ikx_M.z}]^T \in C^M$. Mặc dù tổng này là hữu hạn nhưng chúng ta thấy rằng với $z \in \Omega$ thì $W_M(z)$ có giá trị lớn hơn rất nhiều so với giá trị của nó ứng với $z \notin \Omega.$ Dưới đây là các ví dụ cụ thể.

Ví dụ thứ nhất: Chúng ta lấy $q = 0.8 + 0.5i$ trên đường tròn đơn vị. Đồ thị đồng mức (contour plot) của hàm $W_M(z)$ ứng với $F_\sharp = \operatorname{Im} F$ và $F_\sharp = |\operatorname{Re} F| + \operatorname{Im} F$ được biểu diễn ở Hình 1. Trong đó đồ thị bên trái ứng với $F_\sharp = \operatorname{Im} F$ và đồ thị bên phải ứng với $F_\sharp = |\operatorname{Re} F| + \operatorname{Im} F$. Từ Hình 1 ta thấy cả hai đồ thị đều cho ta hình ảnh của miền Ω gần giống với hình dạng thực của nó (đường tròn đơn vị). Điều này phù hợp với lý thuyết mà ta đã chỉ ra. Vì trong trường hợp này các giả thiết của Định lý 5 và Định lý 6 đều được thỏa mãn.

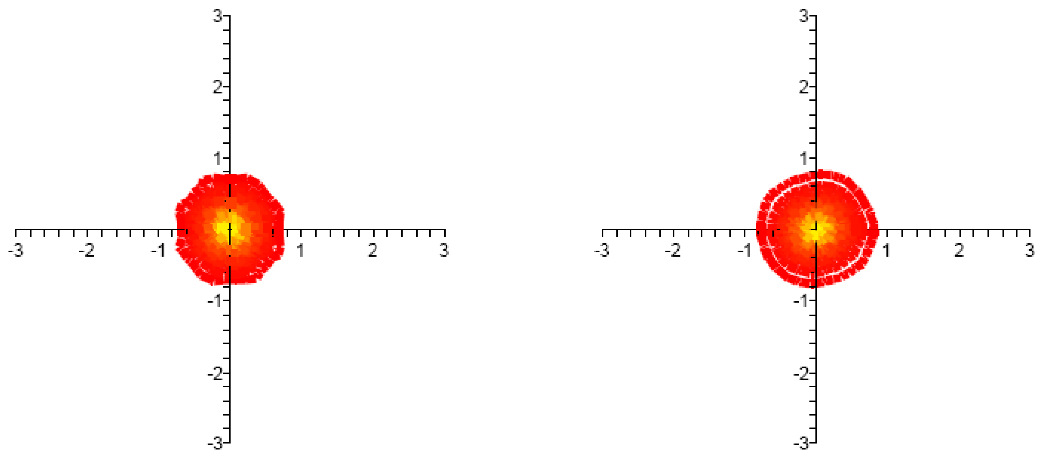


Hình 1. *Đồ thị đồng mức của hàm $W_M(z)$ ứng với $q=0.8 + 0.5i$ trong hình tròn đơn vị.*

Ví dụ thứ hai: Chúng ta lấy $q = 0.8$ trên đường tròn đơn vị. Đồ thị đồng mức của hàm $W_M(z)$ ứng với $F_\sharp = \operatorname{Im} F$ và $F_\sharp = |\operatorname{Re} F| + \operatorname{Im} F$ được biểu diễn ở Hình 2. Trong đó đồ thị bên trái ứng với $F_\sharp = \operatorname{Im} F$ và đồ thị bên phải ứng với $F_\sharp = |\operatorname{Re} F| + \operatorname{Im} F$. Từ Hình 2 ta thấy đồ thị bên trái cho ta hình ảnh của miền Ω gần tròn nhưng bán kính của nó nhỏ hơn một rất nhiều so với hình ảnh của miền Ω cho ở đồ thị bên phải. Như vậy phương pháp nhân tử hóa đối với $F_\sharp = |\operatorname{Re} F| + \operatorname{Im} F$ khôi phục hình dạng Ω tốt hơn phương pháp nhân tử hóa áp dụng cho $F_\sharp = \operatorname{Im} F$. Điều này một lần nữa cũng phù hợp với lý thuyết mà ta đã chỉ ra. Vì trong trường hợp này các giả thiết của Định lý 5 thỏa mãn và các giả thiết của Định lý 6 không được thỏa mãn.



Hình 2. *Đồ thị đồng mức của hàm $W_M(z)$ ứng với $q=0.8$ trong hình tròn đơn vị.*



Hình 3. *Đồ thị đồng mức của hàm $W_M(z)$ ứng với q= -0.8 trong hình tròn đơn vị.*

Ví dụ thứ ba: Chúng ta lấy $q = -0.8$ trên đường tròn đơn vị. Hàm $W_M(z)$ ứng với $F_\sharp = \operatorname{Im} F$ và $F_\sharp = |\operatorname{Re} F| + \operatorname{Im} F$ tương ứng có đồ thị bên trái và bên phải của hình 3. Ta thấy cả hai đồ thị biểu điễn hình dạng miền Ω sai lệch so với hình dạng thực của nó rất nhiều. Phương pháp nhân tử hóa áp dụng trong trường hợp này cho ta một kết quả không thật sự tốt. Điều này cũng phù hợp với lý thuyết chúng ta đã phát biểu. Vì trong trường hợp này, các giả thiết của Định lý 5 và Định lý 6 đều không thỏa mãn.

4. Kết luận

Bài báo đã trình bày phương pháp nhân tử hóa để xác định vị trí, hình dạng dị vật tán xạ trong bài toán tán xạ ngược. Từ đó, áp dụng phương pháp vào giải số các ví dụ cụ thể. Đến nay, phương pháp nhân tử hóa đã được một số nhà toán học nghiên cứu vào việc giải các bài toán ngược trong phương trình đạo hàm riêng và bước đầu đã thu được một số kết quả nhất định.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Kirsch, A. (1996), *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer - Verlag, New York.

[2] Kirsch, A. (1999), *Factorization of the far field operator for the inhomogeneous medium case and an application in inverse scattering theory*, Inverse Problems 15: 413–429.

[3] Kirsch, A. (2002), *The MUSIC algorithm and the factorization method in inverse scattering theory for inhomogeneous media*, Inverse Problems 18: 1025 – 1040.

[4] Vainikko, G. (1997), *Fast solvers of the Lippmann - Schwinger equation*, Research Report A 387, Helsinki University of Technology.