

**ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

**TS. Phạm Quý Mười**

**Giáo trình  
LÍ THUYẾT TỐI ƯU**

**Đà Nẵng, 2020**

# Lời nói đầu

Lý thuyết tối ưu là một lĩnh vực đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu các vấn đề về cực trị, có nhiều ứng dụng trong đời sống thực tế cũng như trong các ngành khoa học. Tuy nhiên phải đến những năm 30, 40 của thế kỉ XX, lý thuyết tối ưu mới được hình thành với tư cách là một lý thuyết độc lập với nhiều hướng nghiên cứu khác nhau và ngày càng được ứng dụng nhiều hơn trong cuộc sống nhờ sự phát triển của công nghệ thông tin, đặc biệt là máy tính.

Giáo trình lý thuyết tối ưu nhằm giới thiệu một cách có hệ thống về bài toán tối ưu, cách phân loại và một số các kết quả cơ bản về điều kiện cần và đủ cho nghiệm của bài toán tối ưu. Giáo trình cũng giới thiệu một vài phương pháp số cơ bản để tìm nghiệm xấp xỉ cho bài toán tối ưu tự do. Nội dung nghiên cứu trong giáo trình tập trung xây dựng lý thuyết cơ bản cho bài toán tối ưu trơn, tức là hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc khả vi đến cấp cần thiết. Giáo trình được trình bày trong ba chương khái quát những

vấn đề chung nhất khi tiếp cận với lý thuyết và giải thuật cho bài toán tìm cực tiểu.

### **Chương 1: Kiến thức cơ sở**

Chương này trình bày các khái niệm cơ bản và các kí hiệu được sử dụng trong luận văn gồm: một số khái niệm về giá trị riêng, tập lồi, hàm lồi, hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}^n$ . định lý Taylor, định lý về giá trị trung gian cũng như các định lý tách,... tạo cơ sở, tiền đề cho việc tiếp cận những kiến thức ở các chương sau.

### **Chương 2: Cơ sở tính chất nghiệm và giải thuật của bài toán tối ưu**

Chương này trình bày một số kết quả về các khái niệm mở đầu về bài toán tối ưu tổng quát, các điều kiện nghiệm cần và đủ của bài toán tối ưu, các tính chất quan trọng về cực trị của hàm lồi và sự hội tụ của giải thuật giảm - cơ sở của việc hình thành các giải thuật sau này.

### **Chương 3: Giải thuật cho bài toán tối ưu không ràng buộc**

Chương này trình bày các kết quả về việc hình thành giải thuật giảm của Bài toán tối ưu không điều kiện ràng buộc, các phương pháp tìm gần đúng cực tiểu của hàm một biến, sự hội tụ, tốc độ của phương pháp giảm nhanh nhất và trường hợp riêng đối với bài toán tối ưu bậc hai.

Giáo trình được biên soạn bám sát đề cương môn học, tập trung vào các kiến thức cơ bản và các kỹ năng cần thiết theo chuẩn đầu ra của môn học. Bên cạnh đó, nội dung giáo trình chú trọng đến các khái niệm cơ bản,

các điều kiện cần và đủ quan trọng, thường dùng và hai phương pháp tìm nghiệm xấp xỉ cơ bản nhất: phương pháp giảm gradient và phương pháp Newton. Ngoài ra, để có một nghiên cứu sâu và đầy đủ, các bạn học viên cao học có thể tham khảo thêm một số nguồn tài liệu tham khảo được giới thiệu cụ thể trong giáo trình.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong công tác biên soạn, tham khảo nhiều tài liệu và trình bày một cách có hệ thống để giúp các bạn đọc dễ dàng tiếp cận hơn, song giáo trình được biên soạn lần đầu sẽ khó tránh khỏi sai sót. Tác giả rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của bạn đọc để giáo trình được hoàn thiện hơn trong lần tái bản sau. Mọi góp ý xin được gửi về địa chỉ: Phạm Quý Mười, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng.

*Xin trân trọng cảm ơn./.*

*Đà Nẵng, tháng 01 năm 2020*

**Tác giả**

# Danh mục các ký hiệu

$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{R}$	Tập hợp các số thực
$\mathbb{C}$	Tập hợp các số phức
$\mathbb{K}$	Một trường số, thông thường $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclid $n$ chiều $\mathbb{R}^n$
$\Omega$	Tập mở khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$
$C^k(\Omega)$	Không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp $k$ trên $\Omega$
$D(f)$	Miền xác định của hàm $f$
$R(f)$	Miền giá trị của hàm $f$
$\ x\ $	Chuẩn của vectơ $x \in \mathbb{R}^n$
$\ A\ $	Chuẩn của ma trận $A$
$A^T$	Ma trận chuyển vị của $A$
$I$	Toán tử đơn vị
$\inf$	Cận dưới đúng
$\sup$	Cận trên đúng

# Mục lục

<i>Lời nói đầu</i> . . . . .	3
<i>Danh mục các ký hiệu</i> . . . . .	6
<b>CHƯƠNG 1 MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ</b> . . . . .	<b>13</b>
<i>1.1 Ma trận</i> . . . . .	14
<i>1.2 Không gian Euclide <math>\mathbb{R}^n</math></i> . . . . .	16
<i>1.3 Giá trị riêng và dạng toàn phương</i> . . . . .	21
1.3.1 Giá trị riêng và vectơ riêng . . . . .	21
1.3.2 Dạng toàn phương . . . . .	26
<i>1.4 Tôpô trong không gian <math>\mathbb{R}^n</math></i> . . . . .	27
<i>1.5 Hàm số liên tục trên <math>\mathbb{R}^n</math></i> . . . . .	30
<i>1.6 Định lý Taylor và định lí về giá trị trung gian</i> . . . . .	34
<i>1.7 Các khái niệm về tập lồi và hàm lồi</i> . . . . .	34
1.7.1 Tập lồi . . . . .	35
1.7.2 Hàm lồi . . . . .	37

1.8	<i>Các định lý tách, siêu phẳng và siêu phẳng tựa</i> . . . . .	43
1.9	<i>Cực điểm</i> . . . . .	48
1.10	<i>Bài tập</i> . . . . .	50
<b>CHƯƠNG 2 LÍ THUYẾT CƠ BẢN VỀ BÀI TOÁN TỐI ƯU</b> . . .		<b>53</b>
2.1	<i>Điều kiện cần bậc nhất</i> . . . . .	54
2.1.1	Hướng chấp nhận được . . . . .	56
2.1.2	Điều kiện cần bậc nhất . . . . .	57
2.2	<i>Điều kiện cần bậc hai</i> . . . . .	63
2.3	<i>Điều kiện đủ bậc hai</i> . . . . .	67
2.4	<i>Cực tiểu và cực đại của hàm lồi</i> . . . . .	70
2.5	<i>Bài tập Chương 2</i> . . . . .	73
<b>CHƯƠNG 3 GIẢI THUẬT GIẢM CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU KHÔNG RÀNG BƯỚC</b> . . . . .		<b>75</b>
3.1	<i>Giải thuật lặ cho Bài toán tối ưu không điều kiện ràng buộc</i> . . . . .	76
3.2	<i>Đường tìm kiếm không chính xác</i> . . . . .	79
3.2.1	Quy tắc Armijo . . . . .	79
3.2.2	Quy tắc Goldstein . . . . .	81
3.3	<i>Giải thuật giảm bước nhanh nhất</i> . . . . .	82
3.3.1	Hướng giảm nhanh nhất . . . . .	82

3.3.2	Kích thước bước hằng . . . . .	85
3.3.3	Quy tắc Goldstein trong giải thuật giảm bước nhanh nhất . . . . .	87
3.3.4	Giải thuật giảm bước nhanh nhất với đường tìm kiếm chính xác . . . . .	89
3.3.5	Tốc độ hội tụ . . . . .	94
3.3.6	Bài toán tối ưu bậc hai . . . . .	102
3.3.7	Các chương trình Matlab và ví dụ minh họa . . . . .	115
<b>3.4</b>	<b>Bài tập Chương 3 . . . . .</b>	<b>136</b>
	<i>Tài liệu tham khảo . . . . .</i>	<i>139</i>