

KHẢ NĂNG KẾT NỐI GIỮA TIẾP CẬN CỔ ĐIỂN VÀ TIẾP CẬN TẦN SUẤT CỦA HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG TRONG GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ VỀ XÁC SUẤT

Trần Kiêm Minh¹,
Nguyễn Thị Sinh^{1,2,+}

¹Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế;
²Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng
+ Tác giả liên hệ • Email: ntsinh@ued.udn.vn

Article history

Received: 04/10/2024

Accepted: 30/10/2024

Published: 05/12/2024

Keywords

Probability, classical approach, frequentist approach, high school students

ABSTRACT

Probability is a fundamental mathematical branch with extensive practical applications. The 2018 Vietnamese mathematics curriculum for the secondary school level underscores probability and statistics by augmenting their content and instructional time in the teaching syllabus. However, an in-depth analysis of the curriculum and textbooks reveals that the classical approach to probability holds a central and dominant status in both textbooks and teaching practices. The connection between the classical and frequentist approaches in teaching high school probability remains limited. In this study, we examined 11th-grade students' ability to link these two approaches when solving probability problems. The preliminary findings confirm that the classical approach is predominant among most students, while the connection between the classical and frequentist approaches is rarely observed during problem-solving. These results highlight the need to promote the frequentist approach and its connection to the classical approach in teaching high school probability.

1. Mở đầu

Xác suất là một lĩnh vực quan trọng trong toán học với nhiều ứng dụng thực tế, đặc biệt trong khoa học dữ liệu. Trong Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, thống kê và xác suất được xác định là mạch kiến thức chính và được đưa vào giảng dạy từ lớp 2 đến lớp 12 với chương trình mang tính “đồng tâm” và nâng cao dần (Bộ GD-ĐT, 2018). Sự thay đổi này nhằm gia tăng tính ứng dụng và giá trị thiết thực của giáo dục toán học. Nghiên cứu về kết nối hai tiếp cận cổ điển và tần suất trong dạy học xác suất đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu giáo dục toán học. Theo Vũ Như Thư Hương (2005), tại Việt Nam (ở thời điểm tác giả nghiên cứu) dạy học xác suất vẫn chủ yếu tập trung vào tiếp cận cổ điển, trong khi tiếp cận tần suất tuy có xuất hiện trong chương trình nhưng với vị trí và vai trò tương đối mờ nhạt. Điều này có thể giới hạn sự hiểu biết của HS về khái niệm xác suất một cách đơn điệu theo nghĩa cổ điển và mất đi cơ hội hiểu “nghĩa thực tế” của khái niệm xác suất.

Một số công bố quốc tế (Albert, 2003; Girard, 2004; Henry, 2009; Ireland & Watson, 2009; Prodromou, 2012; Batanero et al., 2021; Park & Kim, 2023) đã nhấn mạnh sự cần thiết của việc kết hợp cả hai tiếp cận cổ điển và tần suất trong dạy học xác suất ở phổ thông, nhằm phát triển tư duy và suy luận xác suất cho HS dựa trên dữ liệu thực nghiệm. Trong bối cảnh Việt Nam, tiếp cận cổ điển (xác suất) và tiếp cận tần suất (xác suất thực nghiệm) về xác suất đều được đưa vào Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018. Các khía cạnh liên quan đến xác suất thực nghiệm đã xuất hiện nhiều hơn trong các sách giáo khoa. Mặc dù vậy, mối liên hệ giữa xác suất thực nghiệm và xác suất lý thuyết chưa được đề cập một cách rõ ràng và cơ hội kết nối hai tiếp cận xác suất này của HS còn hạn chế. Bài báo này hướng đến việc xem xét khả năng kết nối giữa tiếp cận cổ điển và tiếp cận tần suất của HS lớp 11 trong giải toán xác suất sau khi các em đã học xong chủ đề này; tìm câu trả lời cho câu hỏi nghiên cứu sau: HS lớp 11 thể hiện sự kết nối giữa tiếp cận cổ điển và tiếp cận tần suất như thế nào trong giải quyết vấn đề về xác suất?

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Tổng quan nghiên cứu và cơ sở lý thuyết

2.1.1. Tiếp cận cổ điển và tiếp cận tần suất đối với xác suất

Theo Prodromou (2012), tiếp cận cổ điển (quan niệm Laplace) về xác suất dựa trên những xem xét lý tính về tính đối xứng trong việc phát sinh ngẫu nhiên hoặc dựa trên sự giống nhau trong ngôn ngữ mô tả tình huống ngẫu nhiên. Từ đó, định nghĩa cổ điển đưa ra xác suất bằng nhau đối với các trường hợp đối xứng như vậy. Khi tất cả các biến cố

sơ cấp (kết quả có thể có của một phép thử) đồng khả năng xảy ra, ta nói đó là một tình huống cân bằng xác suất. Theo tiếp cận cổ điển, trong một tình huống cân bằng xác suất, thì xác suất của một biến cố A được định nghĩa:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}, \text{ trong đó } n(\Omega) \text{ là số các kết quả có thể có (số phần tử của không gian mẫu) và } n(A) \text{ là số các kết quả}$$

thuận lợi cho biến cố A.

Xác suất theo tiếp cận cổ điển này chỉ được dùng khi số phần tử của không gian mẫu là hữu hạn và các kết quả của phép thử được giả định là đồng khả năng.

Tiếp cận tần suất xem xác suất được bao hàm trong chính thực nghiệm ngẫu nhiên, và xuất hiện như là tần suất ổn định, khi thực nghiệm ngẫu nhiên được lặp lại một cách độc lập trong cùng các điều kiện. Mặc dù tiếp cận tần suất có thể được sử dụng cho mọi phép thử và không cần điều kiện đồng khả năng nhưng chính việc giả định các thực nghiệm ngẫu nhiên được lặp lại một cách độc lập trong cùng điều kiện lại mang tính chủ quan. Xác suất theo tiếp cận tần suất còn được gọi là xác suất thực nghiệm.

Nghiên cứu về dạy học xác suất ở phổ thông đã chỉ ra sự cần thiết phải kết hợp đồng thời hai tiếp cận này trong dạy học xác suất để thúc đẩy một hiểu biết đầy đủ hơn của HS về xác suất. Nếu chỉ tập trung vào tiếp cận cổ điển thì việc dạy học xác suất có nguy cơ lạm dụng nhiều việc đếm và tính toán tổ hợp. Ngược lại, nếu chỉ tập trung vào tiếp cận tần suất thì sẽ dẫn đến một sự nhập nhằng trong việc lấy một giá trị gần đúng trong thực tế để định nghĩa cho một khái niệm toán học trừu tượng như xác suất.

2.1.2. Nghiên cứu về tiếp cận cổ điển và tiếp cận tần suất trong dạy học xác suất

Việc tìm hiểu quan niệm về xác suất của người học là một vấn đề mà các nhà nghiên cứu giáo dục toán học quan tâm. Chẳng hạn, Albert (2003) đã tiến hành khảo sát sinh viên (SV) đại học về quan niệm của họ về xác suất. Bằng cách phân tích các câu trả lời của SV, kết quả từ cuộc khảo sát chỉ ra rằng đối với các câu hỏi liên quan đến xác suất theo nghĩa cổ điển, SV dễ trả lời đúng hơn so với các câu hỏi liên quan đến xác suất thực nghiệm. Nhìn chung, các SV tham gia vào nghiên cứu này có sự nhầm lẫn về các khái niệm xác suất lí thuyết, xác suất thực nghiệm và xác suất chủ quan. Họ có khuynh hướng cho rằng các kết quả là có khả năng xảy ra như nhau ngay cả khi giả định này là không phù hợp. Dựa trên cơ sở những phân tích đó, Albert (2003) cũng đã đề xuất một số phương án đối với việc dạy học xác suất nhằm giúp SV cải thiện những hiểu biết của mình về xác suất. Chẳng hạn, chương trình nên dành nhiều thời gian hơn cho quan niệm tần suất và GV nên thảo luận về những tình huống mà quan niệm cổ điển về xác suất không áp dụng được, ví dụ như những tình huống mà các kết quả của phép thử không đồng khả năng xảy ra.

Trong một nghiên cứu hướng đến thúc đẩy những kết nối giữa xác suất lí thuyết và xác suất thực nghiệm trong thực hành dạy học Toán ở phổ thông, Ireland và Watson (2009) quan tâm đến những kết nối có thể có của HS lớp 5 và 6 giữa các khía cạnh cổ điển và tần suất trong học tập xác suất. Các tác giả sử dụng phần mềm Tinkerplots để mô phỏng các cỡ mẫu lớn cho các biến cố ngẫu nhiên. Nghiên cứu áp dụng mô hình đánh giá nhận thức phân bậc SOLO để đánh giá sự hiểu biết của HS về hai khía cạnh này. Kết quả cho thấy, thiếu hiểu biết về ý nghĩa của các khái niệm lí thuyết, chẳng hạn như tính công bằng, là một rào cản trong việc kết nối xác suất lí thuyết với kết quả thực nghiệm trên phần mềm của HS. Nghiên cứu chỉ ra rằng việc sử dụng Tinkerplots có thể cung cấp một liên kết có ý nghĩa đến các thao tác cụ thể như trong thực tế và có thể giúp tạo ra các mẫu lớn, giúp HS dễ dàng tiếp cận ý nghĩa của Luật số lớn thông qua mô phỏng. Nghiên cứu cũng khẳng định việc tính Toán đúng giá trị xác suất không đồng nghĩa với việc HS hiểu rõ khái niệm lí thuyết. Để cải thiện, cần tăng cường trải nghiệm của HS với các khái niệm cơ bản như tính ngẫu nhiên và đồng khả năng qua nhiều phép thử. Tác giả khuyến nghị GV tạo nhiều tình huống học tập phong phú để HS trải nghiệm rõ ràng và thường xuyên hơn cả xác suất lí thuyết lẫn thực nghiệm.

Gần đây, Batanero và cộng sự (2021) đã thực hiện một nghiên cứu tìm hiểu sự hiểu biết của GV Toán tương lai về xác suất lí thuyết và xác suất thực nghiệm qua khảo sát 139 GV tại Tây Ban Nha bằng bảng hỏi gồm các câu hỏi mở. Mục đích của nghiên cứu này là phân tích quan niệm của GV Toán tương lai về xác suất cũng như những khó khăn của họ trong việc kết nối các quan niệm này. Kết quả cho thấy, dù nhận biết rõ hai khía cạnh này, GV vẫn chưa sử dụng chúng một cách hiệu quả cũng như chưa kết nối được hai cách tiếp cận này. Kết quả nghiên cứu này cũng đã gợi ý một số vấn đề cần cải thiện trong việc đào tạo GV Toán tương lai theo tiếp cận cổ điển và tiếp cận tần suất đối với xác suất. Theo đó, việc đào tạo cần nhấn mạnh sự chuyển đổi từ tiếp cận cổ điển sang tiếp cận tần suất và ngược lại. Các tác giả tin rằng cần phải xem xét việc dạy và học xác suất từ góc độ mô hình hóa, theo đó công nghệ và các công cụ có sẵn có thể giúp thiết lập mối quan hệ giữa tiếp cận cổ điển và tần suất đối với xác suất. Đây là một khía cạnh tiềm năng cho việc dạy học xác suất từ cách tiếp cận mô hình hóa và mô phỏng.

Các nghiên cứu trên đã cung cấp những đóng góp quan trọng trong việc tìm hiểu sự hiểu biết về xác suất và khả năng kết nối giữa tiếp cận cổ điển và tần suất của người học, tuy nhiên phần lớn chỉ tập trung vào bối cảnh giáo dục ở nước ngoài và hiện chưa có nhiều nghiên cứu sâu về khả năng kết nối giữa tiếp cận cổ điển và tần suất trong dạy học xác suất cho HS THPT ở Việt Nam. Điều này cho thấy việc nghiên cứu khả năng kết nối giữa hai tiếp cận này trong bối cảnh giáo dục Việt Nam là cần thiết, nhằm tìm hiểu rõ hơn về khả năng huy động và kết nối hai tiếp cận này trong học tập xác suất của HS, từ đó có thể đưa ra những khuyến nghị có cơ sở đối với việc dạy học xác suất ở phổ thông.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

2.2.1. Ngữ cảnh và công cụ nghiên cứu

Nghiên cứu của chúng tôi được thực hiện trên 177 HS thuộc các lớp 11/1, 11/3, 11/5 và 11/13 của một trường THPT tại TP. Đà Nẵng vào thời điểm học kì 1 của năm học 2023-2024. Tại thời điểm thực nghiệm, các HS này đã được học phần kiến thức xác suất của học kì 2 năm lớp 10. Chúng tôi thiết kế công cụ nghiên cứu là một bảng hỏi có nội dung liên quan đến các tiếp cận khác nhau về xác suất. Bảng hỏi gồm bốn bài tập vừa có trắc nghiệm, vừa có tự luận được thiết kế thành một phiếu học tập. Trong phạm vi của bài báo này, chúng tôi chỉ tập trung vào một tình huống học tập xác suất liên quan đến đòi hỏi phải kết hợp giữa hiểu biết về tiếp cận cổ điển và tiếp cận tần suất để giải quyết vấn đề. Dưới đây là nội dung của tình huống học tập:

Tình huống: Có hai hộp kín A và B, mỗi hộp chứa 10 viên bi trong đó có cả bi đỏ, bi xanh và bi vàng (không phân biệt được khi chạm vào). Người ta đã thực hiện 1000 lần rút bi từ mỗi hộp (mỗi lần rút một viên), sau mỗi lần rút người ta ghi lại màu bi và bỏ lại bi đó vào hộp tương ứng. Người ta thu được kết quả như sau:

- Với hộp A, có 324 lần xuất hiện bi đỏ, 484 lần xuất hiện bi xanh, và 192 lần xuất hiện bi vàng.
- Với hộp B, có 104 lần xuất hiện bi đỏ, 698 lần xuất hiện bi xanh, và 198 lần xuất hiện bi vàng.

Theo em, có bao nhiêu bi mỗi loại trong hộp A? Có bao nhiêu bi mỗi loại trong hộp B? Giải thích rõ câu trả lời của em.

Hỏi xác suất để rút được một bi đỏ từ hộp A ở lần rút thứ 1001 sẽ là bao nhiêu? Xác suất để rút được một bi đỏ từ hộp B ở lần rút thứ 1001 sẽ là bao nhiêu? Giải thích rõ câu trả lời của em.

2.2.2. Phân tích tiên nghiệm

Đối với tình huống học tập này, ở nhiệm vụ thứ nhất, gọi d , x , v là số bi đỏ, xanh và vàng trong hộp A. Khi đó, xác suất rút được bi đỏ, xanh, vàng trong hộp A mỗi lần là: $P_1 = \frac{d}{10}$, $P_2 = \frac{x}{10}$, $P_3 = \frac{v}{10}$

Theo quan điểm tần suất, các xác suất này được ước lượng bằng xác suất thực nghiệm từ 1000 lần rút bi, ước lượng này dựa trên thực tế là cỡ mẫu lớn và kết quả độc lập, tức là:

$$P_1 = \frac{d}{10} \approx \frac{324}{1000} = 0,324, \quad P_2 = \frac{x}{10} \approx \frac{484}{1000} = 0,484, \quad P_3 = \frac{v}{10} \approx \frac{192}{1000} = 0,192$$

Vì số lượng bi là số nguyên nên số lượng bi đỏ trong hộp A là 3 viên, số bi xanh trong hộp A là 5 viên và số bi vàng trong hộp A là 2 viên. Tương tự đối với hộp B số lượng bi đỏ là 1 viên, số bi xanh là 7 viên và số bi vàng là 2 viên. Để trả lời câu hỏi thứ hai, HS chỉ cần áp dụng định nghĩa cổ điển. Xác suất lấy được bi đỏ ở lần 1001 từ hộp A là 0,3 và từ hộp B là 0,1 (vì lấy có hoàn lại nên số lượng bi các loại trong mỗi hộp không đổi).

Mong đợi của chúng tôi khi đề xuất tình huống này là sau khi sử dụng kết quả của 1000 lần thí nghiệm rút bi (tiếp cận tần suất) để thu được ước tính tần suất xuất hiện các loại bi trong mỗi hộp, HS sẽ tính được xác suất theo nghĩa cổ điển đối với việc rút bi từ một hộp chỉ có 10 viên. Ở đây, HS sẽ xây dựng một mô hình xác suất dựa trên quan sát thực tế về kết quả tần suất (kết quả quan sát được trong 1000 lần rút bi), sau đó đơn giản hóa thực tế này để chấp nhận những giả thuyết nhất định (tổng số bi trong mỗi hộp là 10), cuối cùng sử dụng quan niệm cổ điển để tính xác suất rút được bi đỏ. Đối với nhiệm vụ thứ nhất của bài tập này, chúng tôi dự đoán HS sẽ gặp những khó khăn sau đây, chẳng hạn, một số HS có thể không chú ý đến dữ liệu về số lần rút trước đó và không xác định được tần suất xuất hiện các loại bi, HS cũng có thể chỉ dựa vào số lần rút để ước chừng số lượng các loại bi mà không có giải thích rõ ràng về tần suất và xác suất, nghĩa là HS sẽ không thấy được mối liên hệ giữa quan niệm tần suất và quan niệm cổ điển.

2.3. Kết quả và bình luận

Trong phần này, chúng tôi trình bày kết quả và tập trung vào phân tích các câu giải thích của HS để đưa ra nhận định và phân loại về khả năng kết nối giữa tiếp cận cổ điển và tiếp cận tần suất trong quá trình giải quyết vấn đề của HS. Chúng tôi sử dụng phương pháp phân tích chủ đề để phân tích dữ liệu thu thập được. Dựa vào những giải thích

trong bài làm của HS, chúng tôi tiến hành mã hóa dữ liệu và xác định các chủ đề phù hợp với câu hỏi nghiên cứu đặt ra. Sau đó, chúng tôi tiến hành lượng hóa dữ liệu dựa trên việc thống kê và phân loại câu trả lời của HS theo các chủ đề đã được mã hóa.

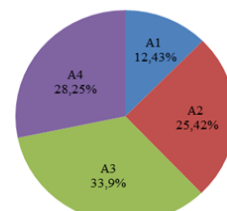
Với tình huống học tập đưa ra, dựa trên kết quả khảo sát chúng tôi đã phân loại và mã hóa các câu trả lời của HS cho câu hỏi 1 qua bảng 1 sau:

Bảng 1. Các mã và chủ đề liên quan đến sự kết nối giữa tiếp cận cổ điển và tiếp cận tần suất

HS	Mình họa bài làm của HS	Mã	Chủ đề
128	1) Theo em, có bao nhiêu bi mỗi loại trong hộp A? Có bao nhiêu bi mỗi loại trong hộp B? Giải thích rõ câu trả lời của em. Tập hợp A: $P(\text{đỏ}) = \frac{224}{1000} = 0,224$ $\Rightarrow$ Bi đỏ: $10 \cdot 0,224 \approx 2,24 \approx 2$ (viên) $P(\text{xanh}) = \frac{488}{1000} = 0,488$ $\Rightarrow$ Bi xanh: $10 \cdot 0,488 \approx 4,88 \approx 5$ (viên) $\Rightarrow$ Bi vàng: $10 \cdot 0,284 \approx 2,84 \approx 3$ (viên) Tập hợp B: $P(\text{đỏ}) = \frac{104}{1000} = 0,104$ $\Rightarrow$ Bi đỏ: $10 \cdot 0,104 \approx 1,04 \approx 1$ (viên) $P(\text{xanh}) = \frac{698}{1000} = 0,698$ $\Rightarrow$ Bi xanh: $10 \cdot 0,698 \approx 6,98 \approx 7$ (viên) $\Rightarrow$ Bi vàng: $10 \cdot 0,198 \approx 1,98 \approx 2$ (viên)	Kết hợp được cả hai tiếp cận cổ điển và tần suất để đưa ra kết quả chính xác dựa vào tính xác suất	Kết hợp được hai quan niệm cổ điển và tần suất (A1)
123	Hộp A: có 3 bi đỏ, 5 bi xanh, 2 bi vàng Hộp B: có 1 bi đỏ, 7 bi xanh, 2 bi vàng	Kết hợp được cả hai quan niệm cổ điển và tần suất để đưa ra kết quả chính xác dựa vào tỉ lệ	
62	Với hộp A: 5 bi xanh, 3 bi đỏ, 2 bi vàng, vì em đưa vào số lần xuất hiện của bi màu suy ra Với hộp B: Em nghĩ 7 bi xanh, 1 bi đỏ, 2 bi vàng, vì em đưa vào số lần xuất hiện của bi màu suy ra	Ước lượng tần suất theo cảm tính để đưa ra kết quả	Kết hợp quan niệm cổ điển và tần suất nhưng chưa hoàn toàn (A2)
143	Hộp A: có 3 bi đỏ, 5 bi xanh, 2 bi vàng Ước bi xanh có số lần xuất hiện nhiều nhất nên sẽ có nhiều bi hơn Hộp B: có 1 bi đỏ, 7 bi xanh, 2 bi vàng Số lần bi xanh có số lần xuất hiện nhiều nhất nên sẽ có nhiều bi hơn Nên bi xanh có số lần xuất hiện nhiều nhất	Liên hệ đến quan niệm tần suất nhưng chưa hoàn toàn	
50	Theo em, tập hợp A có 3 bi đỏ, 5 bi xanh, 2 bi vàng Tập hợp B có 1 bi đỏ, 7 bi xanh, 2 bi vàng Tập hợp A có số lần xuất hiện của bi xanh lớn nhất Tập hợp B có số lần xuất hiện của bi xanh lớn nhất	Chưa liên hệ được với quan niệm tần suất để đưa ra kết quả đúng	Chưa kết hợp được hai quan niệm cổ điển và tần suất (A3)
64	Cho hai hộp A và B. Hộp A có 3 bi đỏ, 5 bi xanh, 2 bi vàng Hộp B có 1 bi đỏ, 7 bi xanh, 2 bi vàng Cho rằng không thể biết được số lượng mỗi loại bi ở mỗi hộp		Không trả lời (A4)

Sau đó, chúng tôi tiến hành lượng hóa dữ liệu dựa trên việc thống kê và phân loại câu trả lời của HS theo các chủ đề trên. Quá trình lượng hóa dữ liệu được thực hiện nhằm mục đích xem xét và có cái nhìn tổng quan hơn về mối liên hệ giữa các quan niệm của HS về xác suất. Thu thập dữ liệu từ các câu trả lời, chúng tôi đã thống kê kết quả của nhiệm vụ thứ nhất ở hình 1.

Kết quả trên cho thấy chỉ có 12,43% HS kết hợp được cả hai tiếp cận cổ điển và tần suất để đưa ra kết quả chính xác. Các HS này ước tính xác suất bằng cách tính tần số tương đối hoặc tỉ lệ phần trăm số lần xuất hiện mỗi loại bi trên 1000 lần rút, sau đó xác định số lượng mỗi loại bi trong hộp bằng cách nhân xác suất ước tính với 10 (số bi trong hộp). Cuối cùng làm tròn số lượng bi đến số nguyên gần nhất. Điều này cho thấy một tỉ lệ nhỏ HS thực sự nắm vững và có khả năng áp dụng những quan niệm khác nhau về xác suất một cách linh hoạt và chính xác. Những HS này không chỉ hiểu xác suất lí thuyết



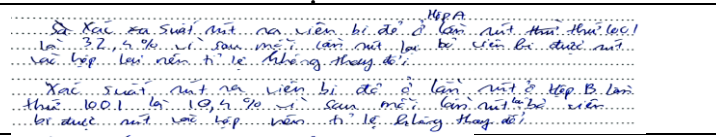
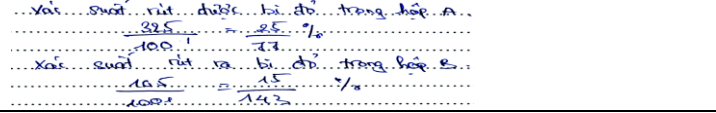
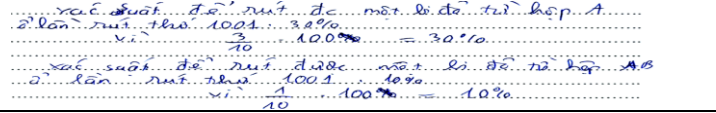
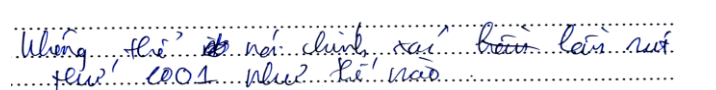
Hình 1. Phân loại tỉ lệ câu trả lời cho câu hỏi 1 theo từng chủ đề

mà còn biết cách sử dụng dữ liệu thực nghiệm để đưa ra kết luận. Đây là nhóm HS có tiềm năng cao trong việc hiểu và phối hợp linh hoạt giữa tiếp cận cổ điển và tiếp cận tần suất về xác suất. 25,42% HS có thể hiện các kết nối giữa hai tiếp cận trong bài làm nhưng sự kết nối chưa rõ ràng. Những HS này đã có ý tưởng liên hệ đến quan niệm tần suất, mặc dù đưa ra kết quả đúng nhưng cách giải thích chỉ liên tưởng đến tỉ lệ mỗi loại bi chứ không đưa ra lập luận chặt chẽ để xác định số lượng mỗi loại bi trong hộp. Điều này có thể là do HS chưa hiểu rõ hoặc chưa có kỹ năng kết hợp dữ liệu thực nghiệm vào tình huống xác suất cụ thể một cách chính xác. Tỉ lệ HS chưa thể hiện tốt liên hệ giữa tiếp cận cổ điển và tiếp cận tần suất là khoảng 62,16%, trong đó 33,9% HS không thể kết nối với tiếp cận tần suất để đưa ra kết quả đúng. Các HS này chỉ trả lời đơn giản dựa trên các kết quả quan sát được mà không thể ước lượng được xác suất từ dữ liệu thực nghiệm của 1000 lần thí nghiệm trước đó. Suy luận của các em chỉ là số lượng bi này nhiều hơn số lượng bi khác dẫn đến những dự đoán kết quả sai vì các em không thể liên hệ tần suất trong 1000 lần thí nghiệm với ước tính số lượng mỗi loại bi trong hộp. Điều này cho thấy các em còn thiếu sự kết nối nhận thức với khái niệm xác suất theo nghĩa tần suất.

Qua những phân tích ở trên, chúng tôi nhận thấy HS còn rất khó khăn trong việc kết nối hai cách tiếp cận cổ điển và tần suất đối với khái niệm xác suất. Một số HS (28,25%) không thể đưa ra lời giải đối với câu hỏi thứ nhất của tình huống. Lí giải cho những kết quả quan sát thực nghiệm này, chúng tôi cho rằng sự mờ nhạt của tiếp cận tần suất cũng như sự thiếu vắng các kiểu nhiệm vụ toán kết nối giữa hai tiếp cận này trong quá trình học đã ảnh hưởng đến khả năng huy động và kết nối nhận thức của HS.

Trong câu hỏi 2 của tình huống, với yêu cầu rõ ràng về khả năng rút được bi đỏ ở lần rút 1001, chúng tôi muốn phân tích xem các HS có sử dụng mô hình xác suất cổ điển đã xây dựng ở nhiệm vụ thứ nhất để đưa ra câu trả lời hay không? Chúng tôi tiếp tục mã hóa và phân loại các câu trả lời của HS như trong bảng 2 ở sau.

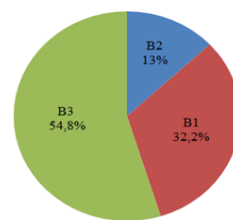
Bảng 2. Các chủ đề được sử dụng để xác định kết quả câu hỏi 2

HS	Mình họa bài làm của HS	Mã	Chủ đề
32		Sử dụng kết quả của 1000 lần thí nghiệm rút bi để thu được ước tính tần suất	Sử dụng quan niệm tần suất (B1)
138		Sử dụng kết quả của 1001 lần thí nghiệm rút bi để thu được ước tính tần suất	
80		Sử dụng xác suất cổ điển ở nhiệm 1 để đưa ra câu trả lời đúng	Sử dụng quan niệm xác suất cổ điển (B2)
171		Cho rằng không thể tính được xác suất theo yêu cầu hoặc không trả lời	Chưa xác định được quan niệm xác suất (B3)

Tiến hành lượng hóa dữ liệu, chúng tôi thu được kết quả trong hình 2.

Hình 2 cho thấy chỉ có 13% HS đưa ra câu trả lời chính xác, những HS này đã biết cách sử dụng kết quả đã có ở nhiệm vụ một và tính đúng xác suất lấy được một bi đỏ trong mỗi hộp ở lần rút tiếp theo. Điều này thể hiện rằng chỉ có một tỉ lệ nhỏ HS đã nhận thấy được xác suất cổ điển ở trong bài tập này và sử dụng nó để xác định xác suất rút được bi đỏ ở lần rút 1001 của hộp A là $\frac{3}{10}$ và của hộp B là $\frac{1}{10}$.

Có 32,2% HS đưa ra câu trả lời chưa chính xác. Những HS này chỉ sử dụng kết quả của 1000 lần thí nghiệm rút bi để thu được ước tính tần suất của xác suất mà không tính đến việc rút bi sẽ được thực hiện từ một chiếc hộp chỉ có 10 viên bi (tính xác suất theo tiếp cận cổ điển) nên họ cho rằng xác suất rút được bi đỏ ở lần rút thứ 1001 ở hộp A vẫn là $\frac{324}{1000}$ và hộp B vẫn là $\frac{104}{1000}$. Một số HS lại sử dụng dữ liệu của 1001 lần rút bi để đưa ra đáp số lần lượt là $\frac{325}{1001}$ và $\frac{105}{1001}$. Ở đây, chúng ta thấy rằng những em HS này chưa nhận ra được chỉ cần áp dụng công thức tính xác suất theo tiếp cận cổ điển để tìm ra kết quả của câu thứ hai. Thay vào đó, HS vẫn còn bị ảnh hưởng từ những kết quả



Hình 2. Phân loại tỉ lệ câu trả lời cho câu hỏi 2 theo chủ đề

liên quan đến tần suất ở câu thứ nhất, và từ đó đưa ra câu trả lời sai. Một số HS dù đã xây dựng được mô hình xác suất theo tiếp cận cổ điển ở câu thứ nhất nhưng các em vẫn chưa thể vận dụng được để đưa ra câu trả lời đúng cho câu hỏi 2.

Đáng chú ý là có tới 54,8% HS cho rằng không thể tính được xác suất theo yêu cầu hoặc không trả lời câu hỏi này. Kết quả này cho thấy rằng hơn một nửa số HS tham gia khảo sát gặp khó khăn trong việc nhận ra và tính xác suất theo tiếp cận cổ điển trong một tình huống xác suất cụ thể.

Kết quả nghiên cứu đã cho thấy những khó khăn của HS trong việc kết nối giữa tiếp cận cổ điển và tần suất khi giải quyết các bài toán xác suất. Những khó khăn này có thể được hiểu và dự đoán được từ phân tích tiên nghiệm tình huống học tập này. Cụ thể, phân tích tiên nghiệm đã dự đoán rằng HS có thể gặp khó khăn trong việc sử dụng tần suất từ dữ liệu thực nghiệm để đưa ra kết luận chính xác về số lượng bi trong hộp, cũng như sử dụng quan niệm cổ điển vào các tình huống xác suất cụ thể. Kết quả nghiên cứu đã xác nhận dự đoán này, khi chỉ một tỉ lệ nhỏ HS (12,43%) có thể kết nối hiệu quả cả hai tiếp cận, trong khi phần lớn HS gặp khó khăn trong việc vận dụng dữ liệu thực nghiệm hoặc không thể nhận ra sự kết nối giữa hai cách tiếp cận xác suất.

3. Kết luận

Trong nghiên cứu này, chúng tôi hướng đến phân tích sự kết nối giữa tiếp cận cổ điển và tiếp cận tần suất của HS lớp 11 trong quá trình giải quyết một tình huống học tập xác suất. Kết quả cho thấy nhiều HS chưa thiết lập, vận dụng được mối liên hệ giữa hai tiếp cận cổ điển và tần suất về xác suất để giải quyết vấn đề. Nghiên cứu góp phần bổ sung thêm vào hiểu biết của các nhà nghiên cứu giáo dục toán học về vấn đề này qua các ngữ cảnh khác nhau. Chẳng hạn, Batanero và cộng sự (2021) cho thấy các GV Toán tương lai ở Tây Ban Nha có sự nhìn nhận rõ hai khía cạnh xác suất lý thuyết và xác suất thực nghiệm nhưng họ chưa sử dụng chúng một cách hiệu quả cũng như chưa kết nối được hai cách tiếp cận này.

Kết quả thực nghiệm cũng phản ánh một phần rằng HS ít có cơ hội khám phá xác suất từ tiếp cận tần suất và kết hợp hai tiếp cận cổ điển và tần suất trong học xác suất. Vì vậy, HS khó có thể có được một hiểu biết phong phú về xác suất và kết nối hai tiếp cận này trong giải quyết vấn đề. Trên cơ sở đó, chúng tôi khuyến nghị chương trình và thực hành dạy học xác suất hiện nay nên tạo cơ hội để HS làm việc nhiều hơn với tiếp cận tần suất và sự kết nối với tiếp cận cổ điển. Sự kết hợp này sẽ giúp HS có một hiểu biết cân bằng và phong phú hơn đối với khái niệm xác suất và ý nghĩa của nó trong các tình huống thực tế.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này nhận tài trợ từ Quỹ khoa học công nghệ Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, mã số đề tài T2024-TN-08.

Tài liệu tham khảo

- Alber, J.H. (2003). College Students' Conceptions of Probability. *The American Statistician*, 57(1), 37-45. <https://doi.org/10.1198/0003130031063>
- Batanero, C., Begué, N., Álvarez-Arroyo, R., & Valenzuela-Ruiz, S. M. (2021). Prospective Mathematics Teachers Understanding of Classical and Frequentist Probability. *Mathematics*, 9(19), 2526. <https://doi.org/10.3390/math9192526>
- Bộ GD-ĐT (2018a). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).
- De Finetti B, (1974). *Theory of probability*. New York: Wiley.
- Girard, J-C. (2004). La liaison statistiques-probabilités dans l'enseignement. *Repères-IREM*, 57, 83-91.
- Henry, M. (2009). Emergence de la probabilité et enseignement: définition classique, approche fréquentiste et modélisation. *Repères IREM*, 74, 67-89.
- Ireland, S., & Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 339-370. <https://doi.org/10.29333/iejme/244>
- Park, J., & Kim, DW. (2023). Facilitating factors and obstacles in the coordination of theoretical probability and relative frequency estimates of probability. *Educational Studies in Mathematics*, 114(3), 439-460. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10253-w>
- Prodromou, T. (2012). Connecting experimental probability and theoretical probability. *ZDM Mathematics Education*, 44, 855-868. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0469-z>
- Vũ Như Thư Hương (2005). *Khái niệm xác suất trong dạy-học toán ở trung học phổ thông*. Luận văn thạc sĩ Didactic Toán, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh.