

ĐIỀU KIỆN ĐỦ CHO HỆ TUYẾN TÍNH KHÔNG DỪNG CÓ CHẠM β -ỔN ĐỊNH MŨ

SUFFICIENT CONDITIONS FOR β -EXPONENTIAL STABILITY OF LINEAR TIME-VARYING SYSTEMS WITH DELAYS

NGUYỄN HOÀNG THÀNH

Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

TÓM TẮT

Bài viết này nghiên cứu tính ổn định mũ của một lớp hệ tuyến tính không dừng có chậm. Việc sử dụng hàm tựa Lyapunov giúp ta thiết lập được các điều kiện đủ mới về tính β -ổn định mũ. Các điều kiện này được phát biểu thông qua sự tồn tại nghiệm xác định dương của phương trình ma trận Riccati. Kết quả của bài viết được minh họa bằng các ví dụ cụ thể.

ABSTRACT

This paper deals with the exponential stability problem of a class of linear time-varying systems with delays. New sufficient β -exponential stable conditions are established by using Lyapunov-like function. These conditions are formulated in terms of existence of positive definite solutions to Riccati matrix equations. The results are illustrated with examples.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Đề tài về tính ổn định Lyapunov là hướng nghiên cứu rất sôi nổi trong suốt những thập niên gần đây. Hệ phương trình vi phân có chậm xuất hiện trong rất nhiều các nghiên cứu về vật lý, sinh thái học, môi trường,... cũng như trong mô hình của các hệ thống có tính kế thừa, mô hình điều chỉnh sự tăng trưởng kinh tế toàn cầu v.v... Vì vậy, đã có rất nhiều các nhà nghiên cứu trong và ngoài nước quan tâm đến bài toán về tính ổn định của hệ có chậm như Vũ Ngọc Phát, Kharitonov, Kolmanovskii,... (chẳng hạn xem trong [1,2,3,4,5,6,7]).

Trong ([6]) tác giả Vũ Ngọc Phát đã làm việc với khái niệm β -ổn định được định nghĩa như sau:

Hệ phương trình vi phân có chậm

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x(t), x(t-h)), \quad t \geq 0, \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h, 0],\end{aligned}$$

được gọi là β -ổn định, với $\beta > 0$, nếu tồn tại một hàm $\xi(\cdot)$ sao cho với mỗi $\phi(\cdot)$, nghiệm $x(t, \phi)$ của hệ thỏa

$$\|x(t)\| \leq \xi(\|\phi\|)e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0,$$

trong đó $\|\phi\| = \max\{\|\phi(t)\| : t \in [-h, 0]\}$.

Trường hợp cụ thể khi $\xi(\|\phi\|) = \gamma\|\phi\|$ với $\gamma \geq 1$ thì ta nói hệ là β -ổn định mũ. Dễ thấy được rằng hệ β -ổn định mũ là β -ổn định còn ngược lại nếu hệ β -ổn định thì không thể suy ra hệ là β -ổn định mũ. Vậy ta có thể coi như tính β -ổn định mũ là “mạnh hơn” tính β -ổn định.

Có rất nhiều phương pháp nghiên cứu tính ổn định của hệ có chậm. Và một phương pháp được sử dụng khá rộng rãi đó là phương pháp hàm Lyapunov, trong đó các điều kiện ổn định tiệm cận được chỉ ra bằng sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMIs) hoặc phương trình Riccati ([5,6,7]). Theo hướng đó các tác giả Mondié và Kharitonov đã chỉ

ra được một điều kiện đủ cho tính β -ổn định mũ dưới dạng LMIs ([7]) đối với hệ tuyến tính dừng có chậm có dạng

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_0 x + \sum_{i=1}^m A_i x(t-h_i), \quad t \geq 0, \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h, 0],\end{aligned}\tag{1.1}$$

trong đó A_i là các ma trận hằng số. Trong ([6]) các tác giả Vũ Ngọc Phát và Phan Thành Nam cũng đã cải tiến và sử dụng hàm tựa Lyapunov và đưa ra một điều kiện đủ cho tính β -ổn định dưới dạng phương trình Riccati đối với hệ tuyến tính không dừng có chậm

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_0(t)x + \sum_{i=1}^m A_i(t)x(t-h_i), \quad t \geq 0, \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h, 0],\end{aligned}\tag{1.2}$$

Trong đó $A_i(t)$ là các ma trận hàm liên tục cho trước trên $\mathbb{R}^+$, $h = \max\{h_i > 0 : i = 1 \div m\}$. Bài viết này nghiên cứu tính β -ổn định mũ “mạnh hơn” tính β -ổn định và cũng chỉ ra một điều kiện đủ dạng phương trình Riccati cho hệ (1.2) cũng như hệ (1.1).

2. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

2.1. Một vài kí hiệu và khái niệm chuẩn bị

Một số kí hiệu và định nghĩa sau sẽ được dùng trong bài.

$\mathbb{R}^+$ kí hiệu tập các số thực dương; $\mathbb{R}^n$ kí hiệu không gian thực n -chiều với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn Euclide $\|\cdot\|$; $\mathbb{R}^{n \times r}$ kí hiệu không gian các ma trận thực có số chiều $n \times r$; A' là chuyển vị của ma trận A . Nếu $A = A'$ thì A được gọi là đối xứng. $\lambda(A)$ là tập tất cả các giá trị riêng của A . $\lambda_{\max} = \max\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$. I là kí hiệu ma trận đơn vị. $\|A\|$ là kí hiệu chuẩn Euclide của ma trận A xác định bởi

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

$C([a, b], \mathbb{R}^n)$ là kí hiệu không gian các hàm lấy giá trị trên $\mathbb{R}^n$ liên tục trên $[a, b]$.

Ma trận số A được gọi là xác định dương nếu $\exists c > 0$ sao cho $\langle Ax, x \rangle \geq c\|x\|^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Ma trận hàm $A(t)$ gọi là xác định dương đều nếu tồn tại số $c > 0$ không phụ thuộc t sao cho

$$\langle A(t)x, x \rangle \geq c\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}.$$

Xét hệ (1.1) với $\phi(t) \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$.

Định nghĩa 1. Cho $\beta > 0$, hệ (1.2) được gọi là β -ổn định mũ nếu với mỗi $\phi(t) \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, $\exists \gamma \geq 1$ sao cho nghiệm $x(t, \phi)$ của hệ thỏa: $\|x(t)\| \leq \gamma \|\phi\| e^{-\beta t}$, $\forall t \geq 0$.

Sau đây là bổ đề (lemma 2.1 trong [6]) quen thuộc dùng cho việc chứng minh kết quả chính.

Bổ đề 1. Giả sử $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là một ma trận đối xứng xác định dương thì với $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bất kì ta có: $\langle Px, x \rangle + 2\langle Qy, x \rangle - \langle Sx, x \rangle \leq \langle (P + QS^{-1}Q)x, x \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

2.2. Các kết quả chính

Xét hệ (1.1) với $\phi(t) \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Trong đó các ma trận hàm $A_i(t)$, $i = 0 \div m$, giả thiết là liên tục trên $\mathbb{R}^+$. Ta có kết quả sau.

Định lí 1. Cho Q là ma trận hằng số đối xứng xác định dương. Nếu tồn tại số $\beta > 0$ và ma trận hàm $P(t)$ khả vi đối xứng, xác định dương đều thỏa mãn: $\|P(t)\| \leq k, \forall t \geq 0$, với $k \geq 0$ là hằng số và $\dot{P} + mI + PA_0 + A_0'P + \sum_{i=1}^m e^{2\beta h_i} PA_i A_i' P + 2\beta P = -Q$ (1), thì hệ (1.2) là β -ổn định mũ.

Chứng minh.

Ta định nghĩa $x_t \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ như sau $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ với $\theta \in [-h, 0], t \geq 0$. Vậy $x_0 \equiv \phi$.

Đặt

$$V(t, x_t) = \langle Px, x \rangle + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 e^{2\beta\theta} \langle x(t+\theta), x(t+\theta) \rangle d\theta.$$

Ta có $V(t, x_t) \leq (mh + \|P\|) \|x_t\|^2 \leq (mh + k) \|x_t\|^2$ (I), và do P là xác định dương đều nên

$$\exists a > 0: V(t, x_t) \geq \langle Px, x \rangle \geq a \|x\|^2. \quad (II)$$

Và

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_t) = & \langle \dot{P}x, x \rangle + \langle P\dot{x}, x \rangle + \langle Px, \dot{x} \rangle + \sum_{i=1}^m (\langle x(t), x(t) \rangle - e^{-2\beta h_i} \langle x(t-h_i), x(t-h_i) \rangle) \\ & - 2\beta \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 e^{2\beta\theta} \langle x(t+\theta), x(t+\theta) \rangle d\theta. \end{aligned}$$

Do $x(t)$ là nghiệm của (1.1)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{V}(t, x_t) = & \langle (\dot{P} + mI + PA + A'P)x, x \rangle + 2 \sum_{i=1}^m \langle PA_i x(t-h_i), x \rangle \\ & + \sum_{i=1}^m -e^{-2\beta h_i} \langle x(t-h_i), x(t-h_i) \rangle - 2\beta \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 e^{2\beta\theta} \langle x(t+\theta), x(t+\theta) \rangle d\theta. \end{aligned}$$

Và theo bổ đề 1 thì

$$\begin{aligned} \langle (\dot{P} + mI + PA + A'P)x, x \rangle + 2 \sum_{i=1}^m \langle PA_i x(t-h_i), x \rangle + \sum_{i=1}^m -e^{-2\beta h_i} \langle x(t-h_i), x(t-h_i) \rangle \\ \leq \left\langle \left(\dot{P} + mI + PA + A'P + \sum_{i=1}^m e^{2\beta h_i} PA_i A_i' P \right) x, x \right\rangle \end{aligned}$$

Vậy

$$\dot{V}(t, x_t) \leq \left\langle \left(\dot{P} + mI + PA + A'P + \sum_{i=1}^m e^{2\beta h_i} PA_i A_i' P \right) x, x \right\rangle - 2\beta \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 e^{2\beta\theta} \langle x(t+\theta), x(t+\theta) \rangle d\theta$$

Kết hợp với (1) ta được

$$\dot{V}(t, x_t) \leq -2\beta \langle Px, x \rangle - \langle Qx, x \rangle - 2\beta \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 e^{2\beta\theta} \langle x(t+\theta), x(t+\theta) \rangle d\theta$$

Vậy theo định nghĩa $V(t, x_t)$ ta có $\dot{V}(t, x_t) \leq -2\beta V(t, x_t) - \langle Qx, x \rangle$

Do Q là ma trận xác định dương nên $\langle Qx, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, vậy cuối cùng ta có được đánh giá sau:

$$\dot{V}(t, x_t) \leq -2\beta V(t, x_t).$$

Từ đó

$$V(t, x_t) \leq e^{-2\beta\theta} V(0, \phi)$$

Kết hợp với (I), (II) ta đi đến $a\|x\|^2 \leq V(t, x_t) \leq e^{-2\beta\theta} V(0, \phi) \leq e^{-2\beta\theta} (mh+k)\|\phi\|^2$. Điều này dẫn đến $\|x\| \leq \sqrt{\frac{(mh+k)}{a}} \|\phi\|$. Vậy hệ (1.2) là β -ổn định mũ.

Chọn $Q = I$, ta có hệ quả sau:

Hệ quả 1. Nếu tồn tại số $\beta > 0$ và ma trận hàm $P(t)$ khả vi đối xứng, xác định dương đều thỏa mãn: $\|P(t)\| \leq k, \forall t \geq 0$, với $k \geq 0$ là hằng số và

$$\dot{P} + PA_0 + A_0'P + \sum_{i=1}^m e^{2\beta h_i} PA_i A_i' P + 2\beta P = -(m+1)I \quad (2), \text{ thì hệ (1.2) là } \beta\text{-ổn định mũ.}$$

Ví dụ 1. Cho hệ $\dot{x} = A_0(t)x + A_1(t)x(t-1/2), t \in \mathbb{R}^+, x(t) = \phi(t), t \in [-1/2, 0]$. Trong đó

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} -(1+e^{1+\sin^2 t} + \frac{1}{2}\sin 2t + t^2 e^{-\sin^2 t}) & 2-e^t \\ e^t - 2 & -(1+e^{1+\sin^2 t} + \frac{1}{2}\sin 2t + t^2 e^{-\sin^2 t}) \end{pmatrix}, A_1(t) = \begin{pmatrix} t & t \\ -t & t \end{pmatrix}.$$

Ta thấy $P(t) = e^{-(1+\sin^2 t)} I$ và $\beta = 1$ thỏa mãn các điều kiện nêu ra trong hệ quả 1 và thỏa mãn (2) với $m=1, h_1 = 1/2$. Vậy ta kết luận là hệ nêu ra trong ví dụ này là 1-ổn định mũ.

3. THẢO LUẬN

3.1. So sánh kết quả với [6], [7]

Trong [6] tác giả Vũ Ngọc Phát và Phan T. Nam cũng chỉ ra được một điều kiện đủ được phát biểu thông qua sự tồn tại nghiệm của một phương trình Riccati, nghiệm $P(t)$ của phương trình đó chỉ cần đòi hỏi là nửa xác định dương tức là $\langle P(t)x, x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, nhưng phương trình Riccati lại có dạng rất phức tạp. Hơn nữa trong [6] các tác giả chỉ nghiên cứu tính β -ổn định còn trong bài này ta đã nghiên cứu tính β -ổn định mũ.

Sử dụng hàm $V(t, x_t)$ nêu trong chứng minh định lý 1 nhưng ở đây ma trận P là ma trận hằng số cùng với kỹ thuật chứng minh hoàn toàn tương tự như trong định lý 1 ta dẫn ra được kết quả sau, xem như là hệ quả trực tiếp của định lý 1. Kết quả này Kharitonov đã đạt được trong ([7]), đó là điều kiện đủ cho bởi sự tồn tại nghiệm của LMIs. Còn sau đây ta nêu ra điều kiện đủ cho bởi sự tồn tại nghiệm của phương trình Riccati.

Định lý 2. Cho P, Q là các ma trận hằng số đối xứng xác định dương. Nếu tồn tại số $\beta > 0$

thỏa mãn: $mI + PA_0 + A_0'P + \sum_{i=1}^m e^{2\beta h_i} PA_i A_i' P + 2\beta P = -Q \quad (3),$ thì hệ (1.1) là β -ổn định mũ.

Ví dụ 2. Cho hệ $\dot{x} = A_0 x + A_1 x(t-1/2), t \in \mathbb{R}^+; x(t) = \phi(t), t \in [-1/2, 0]$.

với các hệ số $A_0 = \begin{pmatrix} -e-2 & 1 \\ -1 & -e-2 \end{pmatrix}$ và $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Lúc đó ta thấy $Q = I, \beta = 1, P = I$ thỏa mãn các điều kiện nêu ra trong định lý 2 và (3). Vậy hệ nêu ra trong ví dụ này là 1-ổn định mũ.

3.2. Trường hợp $\beta = 0$

Ta có định nghĩa ổn định và ổn định tiệm cận như sau:

Định nghĩa 2. Hệ (1.1) được gọi là ổn định nếu với bất kì $\varepsilon > 0$, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho nghiệm $x(t, \phi)$ có điều kiện ban đầu $\phi(t) \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, thỏa $\|\phi\| < \delta$ thì $\|x(t, \phi)\| < \varepsilon \forall t \geq 0$. Hệ là ổn định tiệm cận nếu hệ là ổn định và có một số $\delta > 0$ sao cho nếu $\|\phi\| < \delta$ thì $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, \phi)\| = 0$.

Khi $\beta = 0$ giả thiết nêu ra trong định lý trên trở thành là tồn tại P đối xứng xác định dương đều thỏa: $\|P(t)\| \leq k, \forall t \geq 0$, với $k \geq 0$ là hằng số và

$$\dot{P} + mI + PA_0 + A_0'P + \sum_{i=1}^m PA_i A_i' P = -Q \quad (4)$$

Lúc đó dễ dàng thấy được dựa theo chứng minh ở trên: $\dot{V}(t, x_t) \leq -\langle Qx, x \rangle$ với Q xác định dương và $a\|x(t)\|^2 \leq V(t, x_t) \leq b\|x_t\|^2$ với a, b là các số dương (do (I), (II)). Điều này dẫn tới hệ là ổn định tiệm cận (định lý 2.1 trang 132 của tài liệu [1]). Ta phát biểu kết quả đó như sau

Định lý 3. Cho Q là ma trận hằng số đối xứng xác định dương. Nếu tồn tại ma trận hàm $P(t)$ khả vi đối xứng, xác định dương đều thỏa mãn: $\|P(t)\| \leq k, \forall t \geq 0$, với $k \geq 0$ là hằng số và (4), thì hệ (1.2) là ổn định tiệm cận.

Ví dụ 3. Cho hệ $\dot{x} = A_0(t)x + A_1(t)x(t-1/2), t \in \mathbb{R}^+, x(t) = \phi(t), t \in [-1/2, 0]$. Trong đó

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} -(e^{1+\sin^2 t} + \frac{1}{2}\sin 2t + t^2 e^{-(1+\sin^2 t)}) & -e^t \\ e^t & -(e^{1+\sin^2 t} + \frac{1}{2}\sin 2t + t^2 e^{-(1+\sin^2 t)}) \end{pmatrix}, A_1(t) = \begin{pmatrix} t & t \\ -t & t \end{pmatrix}$$

Ta thấy $P(t) = e^{-(1+\sin^2 t)} I, Q = I$ và $\beta = 1$ thỏa mãn các điều kiện nêu ra trong định lý 3 và thỏa mãn (4). Vậy hệ nêu ra trong ví dụ này là ổn định tiệm cận.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Jack K. Hale, Sjoerd M. Verduyn Lunel, "Introduction to Functional Differential Equations", Springer-Verlag, New York, 1993.
- [2] R. Bellman, K. L. Cooke, "Differential Difference equations", Academic Press, New York, 1963.
- [3] Taro Yoshizawa, "Stability theory by Lyapunov's second method", Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.
- [4] V. B. Kolmanovskii, V. R. Nosov, "Stability of Functional Differential Equations", Academic Press, London, 1986.
- [5] Vladimir B. Kolmanovskii, Jean Pierre Richard, "Stability of some linear system with delays", Technical Notes and Correspondence, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 44, pp.984-989. No. 5. May 1999.
- [6] Vu Ngoc Phat, Phan T. Nam, "Exponential stability criteria of linear non-autonomous systems with delays", Electronic Journal of Differential Equations, No. 58, pp1-8. Vol. 2005(2005), June 2005.
- [7] S. Mondié, V. L. Kharitonov, "Exponential estimates for retarded time-delay systems : An LMI Approach", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 50, pp.268-273. No. 2. February 2005.