ÁNH XẠ CẢM SINH TRÊN SIÊU KHÔNG GIAN TÍCH ĐỐI XỨNG CẤP *n*

INDUCED MAPPINGS ON *n* – SYMMETRIC PRODUCT HYPERSPACE

Trần Đức Thanh[1], Phạm Thị Ái Lài[1]*, Lương Quốc Tuyển[2]

[1]*Học viên cao học Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, Việt Nam*

[2]*Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, Việt Nam*

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: laipham2101@gmail.com

(Nhận bài / Received: 17/7/2024; Sửa bài / Revised: 17/9/2024; Chấp nhận đăng / Accepted: 24/9/2024)

Tóm tắt - Gần đây, lớp hàm liên tục giữa các siêu không gian đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả (xem [1-9]). Các nhà nghiên cứu đã tập trung vào việc phân tích các tính chất quan trọng của hàm liên tục và mối quan hệ giữa một ánh xạ $f: X \to Y$ và ánh xạ cảm sinh tương ứng $f_n: \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ trên siêu không gian tích đối xứng cấp *n*. Trong bài báo này, nhóm tác giả chứng minh rằng: $f \in \mathbb{M}$ có thể được suy ra từ $f_n \in \mathbb{M}$ nếu $\mathbb{M}$ là các lớp hàm liên tục như: mở, nửa mở, đóng, giả-mở. Nhóm tác giả cũng tìm ra các điều kiện cần và đủ để $f \in \mathbb{M}$ suy ra $f_n \in \mathbb{M}$ cho các lớp hàm liên tục khác, chẳng hạn như: mở, mở cảm sinh, nửa mở. Thêm vào đó, nhóm tác giả xem xét sự ảnh hưởng của các biến đổi này trong cấu trúc của siêu không gian và sự liên kết giữa các ánh xạ liên tục.

Từ khóa - Ánh xạ cảm sinh; ánh xạ mở; ánh xạ nửa mở; ánh xạ đóng; ánh xạ giả-mở.

Abstract - Recently, the class of continuous functions between hyperspaces has been extensively studied by many authors (see [1-9]). Researchers have focused on analyzing important properties of continuous functions and the relationship between a mapping $f: X \to Y$ and its corresponding induced mapping $f_n: \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ on the n-th symmetric product hyperspace. In this paper, we prove that $f \in \mathbb{M}$ can be derived from $f_n \in \mathbb{M}$ if $\mathbb{M}$ represents classes of continuous functions such as open, semi-open, closed, and quasi-open functions. We also identify the necessary and sufficient conditions under which $f \in \mathbb{M}$ implies $f_n \in \mathbb{M}$ for other classes of continuous functions, such as open, induced open, and semi-open functions. Additionally, we examine the impact of these transformations on the mathematical structure of hyperspaces and the connection between continuous mappings.

Key words - Induced mapping; open mapping; semi-open mapping; closed mapping; pseudo-open mapping.

1. Giới thiệu

Giả sử X là một không gian Hausdorff được trang bị topo Vietoris và $n \in \mathbb{N}^*$, siêu không gian gồm tất cả các tập con khác rỗng của X có không quá n phần tử được gọi là tích đối xứng cấp n và được kí hiệu là $\mathcal{F}_n(X)$. Việc nghiên cứu siêu không gian $\mathcal{F}_n(X)$ có thể cung cấp thông tin về tính chất của không gian nền và ngược lại.

Mỗi hàm số liên tục giữa các không gian Hausdorff $f: X \to Y$ cảm sinh nên một hàm liên tục

$$f_n: \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$$

được xác định bởi công thức

$$f_n(A) = \{f(a) : a \in A\} \text{ ([10])}.$$

Bây giờ, giả sử $\mathbb{M}$ là lớp các hàm liên tục giữa các không gian topo. Khi đó, nhóm tác giả sẽ cố gắng tìm các mối quan hệ có thể có giữa hai điều kiện sau:

(a) $f \in \mathbb{M}$, và

(b) $f_n \in \mathbb{M}$.

Vấn đề này đã thu hút không ít sự quan tâm của các tác giả trong và ngoài nước, đặc biệt là đối với lớp các hàm liên tục giữa các không gian mêtric compact liên thông không rỗng (xem [1-9]). Mục đích của bài báo này là nghiên cứu mối quan hệ giữa các phát biểu (a) và (b) khi $\mathbb{M}$ là mỗi một trong các lớp sau của các hàm liên tục: mở, mở cảm sinh, nửa mở, đóng và giả-mở.

Cụ thể hơn, nhóm tác giả sẽ chứng minh rằng (a) được suy ra từ (b) cho các lớp hàm liên tục: mở, nửa mở, đóng, giả-mở. Ngoài ra, nhóm tác giả cũng sẽ tìm ra các điều kiện mà (a) suy ra (b) cho các lớp hàm liên tục: mở, mở cảm sinh, nửa mở.

Trong suốt bài báo này, nhóm tác giả quy ước rằng tất cả các không gian là không gian Hausdorff và các ánh xạ là liên tục giữa các không gian topo. Các khái niệm và thuật ngữ khác, nếu không nói gì thêm, thì được hiểu theo nghĩa thông thường. Hơn nữa, nhóm tác giả sử dụng ký hiệu $|C|$ để chỉ lực lượng của tập hợp C và $[C]^{<\omega}$ để chỉ họ gồm tất cả các tập con hữu hạn của C. Ngoài ra, nếu X là một không gian, thì tập hợp tất cả các tập con mở của X được ký hiệu là τ_X, phần trong của $A \subset X$ được kí hiệu là $\mathrm{Int}_X A$, và bao đóng của $A \subset X$ được kí hiệu là $\mathrm{Cl}_X A$. Cuối cùng, với một họ các tập con nào đó $\mathcal{U}$ của X và một hàm $f: X \to Y$, khi đó ta ký hiệu

$$\bigcup \mathcal{U} = \bigcup \{U : U \in \mathcal{U}\};$$

$$f[\mathcal{U}] = \{f(U) : U \in \mathcal{U}\},$$

và tập giá trị của f được kí hiệu là $\mathrm{ran}(f)$.

---

[1] Post – graduate student of Mathematics, The University of Danang - University of Science and Education, Vietnam (Tran Duc Thanh, Pham Thi Ai Lai)

[2] The University of Danang - University of Science and Education, Vietnam (Luong Quoc Tuyen)

2. Cơ sở lí thuyết

Giả sử X là một không gian. Ta đặt

(1) $\mathcal{CL}(X)=\{A\subset X: A$ đóng và khác rỗng$\}$;

(2) $2^X=\{A\in CL(X): A$ compact$\}$;

(3) $\mathcal{F}_n(X)=\{A\in 2^X:|A|\le n\}$;

Ngoài ra, nếu U là một tập con của không gian X, thì ta kí hiệu

$$U^+=\{A\in\mathcal{CL}(X): A\subset U\};$$

$$U^-=\{A\in\mathcal{CL}(X): A\cap U\neq\varnothing\}.$$

Hơn nữa, nếu $\mathcal{U}$ là họ gồm các tập con hữu hạn của không gian X, thì

$$\langle\mathcal{U}\rangle=\left(\bigcup\mathcal{U}\right)^+\cap\bigcap_{U\in\mathcal{U}}U^-.$$

Nhận xét 2.1 ([10]). $\mathcal{CL}(X)$ với topo được định nghĩa bởi topo Vietoris với cơ sở:

$$\left\{\langle\mathcal{U}\rangle:\mathcal{U}\in\left[\tau_X\right]^{<\omega}\right\}$$

được gọi là *topo Vietoris*. Như vậy, $\mathcal{F}_n(X)$ được xem như là không gian con của $\mathcal{CL}(X)$ và được gọi là *tích đối xứng cấp* n của X. Đặc biệt, cơ sở tương ứng với topo của $\mathcal{F}_n(X)$ là họ gồm tất cả các tập hợp có dạng

$$\langle\mathcal{U}\rangle_n=\langle\mathcal{U}\rangle\cap\mathcal{F}_n(X),\ \text{với } \mathcal{U}\in\left[\tau_X\right]^{<\omega}.$$

Nhận xét 2.2 ([10]). V là tập mở (đóng) trong không gian X khi và chỉ khi V^+ và V^- mở (đóng) trong siêu không gian $\mathcal{CL}(X)$, và vì thế, V mở (đóng) trong X khi và chỉ khi $V_n^+=V^+\cap\mathcal{F}_n(X)$ và $V_n^-=V^-\cap\mathcal{F}_n(X)$ mở (đóng) trong siêu không gian $\mathcal{F}_n(X)$.

Định nghĩa 2.3. Một họ được gọi là *có tính chất* γ trong không gian topo X là họ các tập con mở không rỗng đôi một rời nhau của X. Tập gồm tất cả các họ có tính chất γ của X được kí hiệu là $\mathfrak{C}(X)$ và tập gồm tất cả các phần tử của $\mathfrak{C}(X)$ có không quá n phần tử được kí hiệu là $\mathfrak{C}_n(X)$.

Nhận xét 2.4. Với một tập con hữu hạn G của không gian X, tồn tại một họ $\mathcal{U}\in\mathfrak{C}(X)$ sao cho $G\subset\bigcup\mathcal{U}$ và $|U\cap G|=1$ với mọi $U\in\mathcal{U}$.

Chứng minh. Giả sử $G=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ là một tập con hữu hạn của X. Khi đó, với mỗi $x_i\in G$, bởi vì X là không gian Hausdorff, nên tồn tại U_i sao cho

$$x_i\in U_i\in\tau_X \text{ và } x_j\notin U_i \text{ với mọi } j\neq i.$$

Ta đặt họ $\mathcal{U}=\{U_i:i=\overline{1,n}\}$.

Khi đó, dễ thấy rằng, $\mathcal{U}\in\mathfrak{C}(X)$, $G\subset\bigcup\mathcal{U}$ và $U_i\cap G=x_i$ với mỗi $U_i\in\mathcal{U}$.

Định nghĩa 2.5. Giả sử X và Y là các không gian và $f:X\to Y$ là một ánh xạ. Khi đó,

(1) f được gọi là ánh xạ *mở* nếu
$\{f(U):U\in\tau_X\}\subset\tau_Y$;

(2) f được gọi là ánh xạ *mở cảm sinh* nếu tồn tại một không gian con Z của X sao cho $f(Z)=Y$ và $f|_Z$ là ánh xạ mở;

(3) f được gọi là ánh xạ *nửa mở* nếu $\mathrm{Int}_Y f(U)$ là không rỗng với mỗi $U\in\tau_X\setminus\{\varnothing\}$;

(4) f được gọi là ánh xạ *đóng* nếu
$\{f(A):A\in\mathcal{CL}(X)\}\subset\mathcal{CL}(Y)$;

(5) f được gọi là ánh xạ *giả-mở* nếu với mọi $y\in Y$ và với mọi lân cận mở U của $f^{-1}(y)$, ta có
$y\in\mathrm{Int}_Y f(U)$;

Định nghĩa 2.6. Hàm chọn (choice function) của một họ các tập hợp $\mathcal{A}$ là một hàm c sao cho với mỗi tập
$A\in\mathcal{A}$, $c(A)\in A$.

Bổ đề 2.7 ([10]). Nếu $\mathcal{U}$ và $\mathcal{V}$ là các họ con của một không gian X sao cho $\bigcup\mathcal{U}\subset\bigcup\mathcal{V}$ và với mỗi $V\in\mathcal{V}$ tồn tại $U_V\in\mathcal{U}$ sao cho $U_V\subset V$, thì $\langle\mathcal{U}\rangle_n\subset\langle\mathcal{V}\rangle_n$.

3. Kết quả chính

Một lớp ánh xạ $\mathbb{M}$ được bảo toàn bởi sự tương ứng $f\to f_n$ nếu điều kiện $f\in\mathbb{M}$ kéo theo $f_n\in\mathbb{M}$ và lớp $\mathbb{M}$ bị đảo ngược bởi sự tương ứng $f\to f_n$ nếu điều kiện $f\in\mathbb{M}$ được suy ra từ $f_n\in\mathbb{M}$. Trong phần này, nhóm tác giả sẽ phân tích các lớp ánh xạ được đề cập trong phần giới thiệu được bảo toàn hoặc bị đảo ngược bởi sự tương ứng $f\to f_n$.

Bổ đề 3.1. *Giả sử X là một không gian, $A\in\mathcal{F}_n(X)$ và $\mathfrak{U}$ là một tập mở trong $\mathcal{F}_n(X)$ sao cho $A\in\mathfrak{U}$. Khi đó, tồn tại $\mathcal{U}\in\mathfrak{C}_n(X)$ sao cho*

$$A\in\langle\mathcal{U}\rangle\subset\mathfrak{U}$$

và $|A\cap U|=1$ với mỗi $U\in\mathcal{U}$.

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{V}\in\left[\tau_X\right]^{<\omega}$ sao cho

$$A\in\langle\mathcal{V}\rangle_n\subset\mathfrak{U}$$

và theo Nhận xét 2.4, ta xét họ

$$\{W_a:a\in A\}\in\mathfrak{C}(X)$$

sao cho $a\in W_a$, $A\subset\bigcup\mathcal{W}$ và $|A\cap W_a|=1$ với mọi $a\in A$. Khi đó, với mỗi $a\in A$, ta đặt

$$U_a=\left(\bigcap\{V\in\mathcal{V}:a\in V\}\right)\cap W_a;$$

$$\mathcal{U}=\{U_a:a\in A\}.$$

Dễ thấy rằng $\mathcal{U}\in\mathfrak{C}_n(X)$. Bây giờ, ta sẽ chứng minh $\mathcal{U}$ thỏa yêu cầu đề ra. Thật vậy, ta có

$$|A\cap U_a|=|\{a\}|=1 \text{ với mọi } U\in\mathcal{U},$$

$$A \in \langle \mathcal{U} \rangle_n,\ \bigcup \mathcal{U} \subset \bigcup \mathcal{V}$$

và nếu $a \in A \cap V$, thì $U_a \subset V$. Do đó, theo Bổ đề 2.7, ta suy ra: $A \in \langle \mathcal{U} \rangle_n \subset \langle \mathcal{V} \rangle_n$.

Như vậy, bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 3.2. Nếu $\mathcal{U}$ là một họ con không rỗng của X có nhiều nhất n phần tử, thì

$$\mathcal{F}_1(Y) \cap \langle f[\mathcal{U}] \rangle_n \subset f_n(\langle \mathcal{U} \rangle_n) \subset \langle f[\mathcal{U}] \rangle_n.$$

Chứng minh. Ta có

• $f_n(\langle \mathcal{U} \rangle_n) \subset \langle f[\mathcal{U}] \rangle_n$:

Giả sử $A \in \langle \mathcal{U} \rangle_n$, khi đó $A \subset \bigcup \mathcal{U}$ kéo theo

$$f(A) \subset \bigcup [\mathcal{U}].$$

Suy ra $f(A) \in \left(\bigcup [\mathcal{U}]\right)^+$. Mặt khác, với mỗi $U \in \mathcal{U}$, vì $U \cap A \neq \varnothing$ nên $f(U) \cap f(A) \neq \varnothing$.

Do đó, $f(A) \in \bigcap \left\{ f(U)^- : U \in \mathcal{U} \right\}$.

Bởi vậy, $f(A) \in \langle f[\mathcal{U}] \rangle_n$.

• $\mathcal{F}_1(Y) \cap \langle f[\mathcal{U}] \rangle_n \subset f_n(\langle \mathcal{U} \rangle_n)$:

Xét $\{y\} \in \langle f[\mathcal{U}] \rangle_n$, khi đó $y \in f(U)$ với mọi $U \in \mathcal{U}$. Giả sử c là một hàm chọn của họ

$$\left\{ f^{-1}(y) \cap U : U \in \mathcal{U} \right\}.$$

Ta đặt $A = \mathrm{ran}(c)$, khi đó $A \in \langle \mathcal{U} \rangle_n$ và $f_n(A) = \{y\}$. Do vậy, $\{y\} \in f_n(\langle \mathcal{U} \rangle_n)$.

Bổ đề 3.3. Nếu U là một tập không rỗng của X, thì

$$f_n\left(U_n^+\right) = f(U)_n^+.$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 3.2, ta có

$$f_n\left(U_n^+\right) \subset f(U)_n^+.$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh

$$f(U)_n^+ \subset f_n\left(U_n^+\right).$$

Thật vậy, giả sử $B \in f(U)_n^+$. Ta gọi c là một hàm chọn của họ $\left\{ U \cap f^{-1}(\{b\}) : b \in B \right\}$,

và đặt $A = \mathrm{ran}(c)$. Khi đó, $A \in U_n^+$, $f_n(A) = B$.

Bởi vậy, $B \in f_n\left(U_n^+\right)$, do đó bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 3.4. Giả sử $\mathcal{W} \in \mathfrak{C}_2(X)$. Khi đó,

$$f_2(\langle \mathcal{W} \rangle_2) = \langle f[\mathcal{W}] \rangle_2.$$

Chứng minh. Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $|\mathcal{W}| = 1$, thì theo Bổ đề 3.3 ta suy ra điều phải chứng minh.

Trường hợp 2: Nếu $|\mathcal{W}| = 2$, thì bởi Bổ đề 3.2, ta chỉ cần chứng minh rằng $\langle f[\mathcal{W}] \rangle_2 \subset f_2(\langle \mathcal{W} \rangle_2)$.

Thật vậy, giả sử $B \in \langle f[\mathcal{W}] \rangle_2$. Khi đó, $B \subset \bigcup f[\mathcal{W}]$ và $B \cap f(W) \neq \varnothing$ với mọi $W \in \mathcal{W}$.

Bây giờ, giả sử c là một hàm chọn của họ

$$\left\{ f^{-1}(B) \cap W : W \in \mathcal{W} \right\}$$

và $A = \mathrm{ran}(c)$, khi đó $A \in \langle \mathcal{W} \rangle_2$, $f_2(A) = B$.

Điều này chứng tỏ rằng $B \in f_2(\langle \mathcal{W} \rangle_2)$, do đó ta thu được điều phải chứng minh.

Định lí 3.5. *Nếu f_n là ánh xạ mở, thì f là ánh xạ mở.*

Chứng minh. Giả sử $U \in \tau_X$, khi đó nhờ Bổ đề 3.3, ta suy ra $f_n\left(U_n^+\right) = f(U)_n^+$. Ngoài ra, do U_n^+ là một tập mở trong $\mathcal{F}_n(X)$ và f_n là ánh xạ mở nên $f_n\left(U_n^+\right)$ là một tập mở trong $\mathcal{F}_n(Y)$. Suy ra $f\left(U\right)_n^+$ cũng là một tập mở của $\mathcal{F}_n(Y)$. Điều này chứng tỏ rằng $f(U)$ là một tập mở của Y, và do đó ta có điều phải chứng minh.

Định lí 3.6. *f là ánh xạ mở khi và chỉ khi f_2 là ánh xạ mở.*

Chứng minh. Điều kiện cần: Giả sử f là ánh xạ mở và $\mathcal{W} \in \mathfrak{C}_2(X)$. Khi đó, theo Bổ đề 3.4, ta có

$$f_2(\langle \mathcal{W} \rangle_2) = \langle f[\mathcal{W}] \rangle_2.$$

Ngoài ra, do f là ánh xạ mở nên $f_2(\langle \mathcal{W} \rangle_2)$ là một tập mở của $\mathcal{F}_2(Y)$. Nhờ Bổ đề 3.1 ta suy ra rằng f_2 là ánh xạ mở.

Điều kiện đủ: Suy trực tiếp từ Định lí 3.5.

Định lí 3.7. *Nếu f là ánh xạ mở cảm sinh, thì f_2 là ánh xạ mở cảm sinh.*

Chứng minh. Giả sử Z là một không gian con của X sao cho $f(Z) = Y$ và $f|_Z$ là ánh xạ mở. Ta cần chứng minh rằng $f_2|_{\mathcal{F}_2(Z)}$ là ánh xạ mở.

Thật vậy, giả sử $B \in \mathcal{F}_2(Y)$. Ta gọi c là một hàm chọn của họ

$$\left\{ f^{-1}(b) \cap Z : b \in B \right\}.$$

Khi đó, $A = \mathrm{ran}(c) \in \mathcal{F}_2(Z)$, $f_2(A) = B$.

Suy ra $f_2(\mathcal{F}_2(Z)) = \mathcal{F}_2(Y)$, kéo theo

$$f_2|_{\mathcal{F}_2(Z)} = \left(f|_Z\right)_2.$$

Nhờ Định lí 3.6 ta thu được điều phải chứng minh.

Định lí 3.8. *Nếu f_n là nửa mở, thì f là nửa mở.*

Chứng minh. Giả sử B là một tập con trù mật của Y và U là một tập mở không rỗng của X. Khi đó, B_n^+ là một tập con trù mật của $\mathcal{F}_n(Y)$. Suy ra $f_n^{-1}\left(B_n^+\right)$ là tập con trù mật của $\mathcal{F}_n(X)$. Bởi vì U_n^+ là một tập mở không rỗng của $\mathcal{F}_n(X)$ nên tồn tại $A \in U_n^+ \cap f_n^{-1}\left(B_n^+\right)$.

Điều này chứng tỏ rằng $A \subset U$ và $f(A) \subset B$, kéo theo

$$A \subset U \cap f^{-1}(B).$$

Bởi vậy, $f^{-1}(B)$ là một tập trù mật của X, và do đó ta có điều phải chứng minh.

Kết quả tiếp theo cho thấy rằng lớp các ánh xạ nửa mở được bảo toàn và đảo ngược bởi sự tương ứng $f \to f_2$.

Định lí 3.9. *f là nửa mở nếu và chỉ nếu f_2 là nửa mở.*

Chứng minh. Điều kiện cần: Giả sử rằng f là nửa mở và $\mathcal{W} \in \mathfrak{C}_2(X)$. Theo Bổ đề 3.4, ta suy ra

$$f_2(\langle \mathcal{W} \rangle_2) = \langle f[\mathcal{W}] \rangle_2.$$

Ngoài ra, vì $\mathrm{Int}_Y f(W) \neq \varnothing$ với mọi $W \in \mathcal{W}$ nên theo Bổ đề 2.7 ta suy ra

$$\left\langle \left\{ \mathrm{Int}_Y f(W) : W \in \mathcal{W} \right\} \right\rangle_2$$

là một tập mở không rỗng của $\mathcal{F}_2(X)$ chứa trong $f_2(\langle \mathcal{W} \rangle_2)$. Cuối cùng, theo Bổ đề 3.1, f_2 là nửa mở.

Điều kiện đủ: Suy trực tiếp từ Định lí 3.8.

Định lí 3.10. *Nếu f_n là ánh xạ đóng, thì f là ánh xạ đóng.*

Chứng minh. Giả sử A là một tập đóng trong X và $y \in \mathrm{Cl}_X(f(A))$. Khi đó, A_n^+ là một tập đóng trong siêu không gian $\mathcal{F}_n(X)$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh

$$\{y\} \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{F}_n(Y)} f_n\left(A_n^+\right).$$

Thật vậy, giả sử $U \in \tau_{\mathcal{F}_n(Y)}$ sao cho $\{y\} \in U$. Theo Bổ đề 3.1, tồn tại $U \in \tau_Y$ sao cho

$$\{y\} \in U_n^+ \subset U.$$

Do vậy, $y \in U$. Kết hợp với $y \in \mathrm{Cl}_X(f(A))$ ta được

$$U \cap f(A) \neq \varnothing.$$

Tiếp theo, chọn $a \in A$ sao cho $f(a) \in U$. Để ý rằng $\{a\} \in A_n^+$ và $f_n(\{a\}) \in U_n^+ \subset U$, do đó ta suy ra:

$$\mathrm{U} \cap f_n\left(A_n^+\right) \neq \varnothing,$$

$$\{y\} \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{F}_n(Y)} f_n\left(A_n^+\right).$$

Bởi vì f_n là ánh xạ đóng và A_n^+ là một tập đóng trong $\mathcal{F}_n(X)$, $\{y\} \in f_n\left(A_n^+\right)$ nên tồn tại $B \in A_n^+$ sao cho

$$f_n(B) = \{y\}.$$

Điều này có nghĩa là nếu $b \in B$, thì $b \in A$ và $f(b) = y$. Do vậy, $y \in f(A)$ và $f(A)$ là một tập đóng trong Y.

Định lí 3.11. *Nếu f_n là ánh xạ giả-mở, thì f là ánh xạ giả-mở.*

Chứng minh. Giả sử $y \in Y$ và U là lân cận mở của $f^{-1}(y)$. Theo Bổ đề 3.2, ta có

$$f_n^{-1}(\{y\}) = \left(f^{-1}(y)\right)_n^+ \subset U_n^+.$$

Do đó, $\{y\} \in \mathrm{Int}_{\mathcal{F}_n(Y)} f_n\left(U_n^+\right)$.

Theo Bổ đề 3.1, tồn tại $V \in \tau_Y$ sao cho

$$\{y\} \in V_n^+ \subset f_n\left(U_n^+\right),$$

do đó $y \in V$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $V \subset f(U)$. Thật vậy, giả sử $t \in V$. Khi đó, tồn tại $A \in U_n^+$ sao cho

$$f_n(A) = \{t\}.$$

Như vậy, nếu $a \in A$, thì $a \in U$ và $t = f(a) \in f(U)$.

Bởi thế, ta suy ra: $y \in V \subset f(U)$,

do đó $y \in \mathrm{Int}_Y f(U)$. Điều này chứng tỏ rằng f là ánh xạ giả - mở.

4. Kết luận

Trong bài báo này, nhóm tác giả tìm ra được một số lớp các hàm được bảo toàn bởi sự tương ứng $f \to f_2$, và được thể hiện trong Định lí 3.6, 3.7, 3.9. Ngoài ra, nhóm tác giả cũng chứng minh rằng: $f \in \mathbb{M}$ được suy ra từ $f_n \in \mathbb{M}$ nếu $\mathbb{M}$ là các lớp hàm liên tục: mở, nửa mở, đóng, giả-mở, được thể hiện trong Định lí 3.5, 3.8, 3.10 3.11.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được tài trợ bởi Chương trình học bổng đào tạo thạc sĩ, tiến sĩ trong nước của Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup (VINIF), mã số VINIF.2023.ThS.121.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] T. V. An and L. Q. Tuyen, "Further properties of 1-sequence-covering maps", *Commet. Math. Univ. Carolin.*, vol. 49, pp. 477-484, 2008.

[2] J. G. Anaya, F. Capulín, D. Maya, and F. Orozco-zitli, "Induced mappings on symmetric product of continua", *Topology and it Application*, vol. 214, pp. 100-108, 2016.

[3] F. Barragán, "Induced maps on n-fold symmetric product suspensions", *Topology and it Application*, vol. 158, pp. 1192-1205, 2016.

[4] F. Barragán, S. Macías, and J. F. Tenorio, "More on induced maps on n -fold symmetric product suspensions", *Glasnik Matematicki*, vol. 50, pp. 489-512, 2015.

[5] S. Franklin, "Spaces in which sequences suffices", *Fundamenta Mathematicae*, vol. 57, pp. 107-115, 1965.

[6] X. Ge, "Notes on almost open mappings", *Matemaichki Vesnik*, vol 60, pp. 181-186, 2008.

[7] Y. Ge, "Weak forms of open mappings and strong forms of sequence-covering mappings", *Matemaichki Vesnik*, vol. 59, pp. 1-8, 2007.

[8] G. Higuera and A. Illanes, "Induced mappings on symmetric product", *Topology Proceedings*, vol. 37, pp. 367-401, 2011.

[9] A. Illanes, J. A. Naranjo-Murillo, J. E. Vega, and Y. N. Velázquez-Inzunza, "Induced mappings on symmetric product, some answers", *Topology and it Application*, vol. 243, pp. 52-64, 2018.

[10] E. Michael, "Topology on spaces of subsets", *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 71, pp. 152-182, 1951.

[11] K. Borsuk and S. Ulam, "On symmetric products of topological spaces", *Bulletin American Mathematical Society*, vol. 37, pp. 875-882, 1931.

[12] R. Engelking, *General Topology,* 2nd edition, Sigma Series in Pure Mathematics, 6 Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[13] C. Good and S. Macías, "Symmetric products of generalized metric spaces", *Topology and it Application*, vol. 206, pp. 93-114, 2016.