TÍNH CHẤT CO RÚT TUYỆT ĐỐI CỦA CÁC TẬP LỒI, GIỚI NỘI TRONG KHÔNG GIAN l_p (0 < P < 1)

THE AR- PROPERTY OF BOUND CONVEX IN THE SPACE l_p (0 < P < 1)

LÊ HOÀNG TRÍ
Trường Đại học Sư Phạm, Đại học Đà Nẵng

TÓM TẮT

Dugundji chứng minh rằng mỗi tập lồi trong một không gian metric tuyến tính lồi địa phương bất kỳ đều là một co rút tuyệt đối. Người ta đặt ra bài toán rằng Định lý Dugundji còn đúng hay không nếu bỏ đi giả thiết về tính lồi địa phương của không gian metric tuyến tính. Cho l_p (0 < p < 1) là các không gian metric tuyến tính không lồi địa phương; Nội dung của bài báo này là chứng minh mỗi tập lồi, giới nội trong không gian l_p (0 < p < 1) đều là co rút tuyệt đối.

ABSTRACT

Dugundji proved that a convex subset of a locally convex linear metric space is an absolute retract. However, it is not known, whether a convex subset of a non-locally convex linear metric space is an absolute retract? The space l_p (0 < p < 1) are non-locally convex linear metric spaces. The aim of this paper is to prove the AR-property of bound convex subsets in the space l_p (0 < p < 1).

1. Mở đầu

Cho X là một không gian topo khả metric, X được gọi là một co rút tuyệt đối (Viết tắt là AR (absolute retract)) (xem [1]) nếu mỗi không gian topo khả metric Y nhận X làm một tập con đóng đều tồn tại một ánh xạ liên tục r: Y $\rightarrow$ X mà r(x) = x với mỗi x $\in$ X. (Ánh xạ r thỏa mãn các tính chất này được gọi là một phép co rút).

Cho X là một không gian topo khả metric, X được gọi là một thác triển tuyệt đối (viết tắt là AE (absolute extensor)) nếu mỗi không gian metric Y, mỗi tập con đóng A của Y và mỗi ánh xạ liên tục f: A $\rightarrow$ X đều tồn tại ánh xạ liên tục F: Y $\rightarrow$ X mà F(a) = f(a); $\forall a \in A$. (xem [1]).

Ta thấy rằng một không gian topo là co rút tuyệt đối khi và chỉ khi không gian topo đó là thác triển tuyệt đối.

Năm 1951 Dugundji chứng minh được định lý sau:

Định lý Dungundji

Cho A là một tập con đóng của một không gian metric X và E là một không gian topo tuyến tính lồi địa phương. Khi đó mỗi ánh xạ liên tục h: A $\rightarrow$ E đều có một thác triển liên tục H: X $\rightarrow$ E mà H(X) $\subset$ convh(A) (ở đây convh(A) là bao lồi của tập h(A) trong không gian topo tuyến tính E). (Xem Định lý 3.1 trang 58 của [1]).

Từ đó mỗi tập lồi trong một không gian metric tuyến tính lồi địa phương bất kỳ đều là một AR.

Với mỗi p $\in$ (0,1); cho $l_p = \{x = (x_n) / \sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^p < +\infty\}$. $\forall$ x = (x_n), y = $(y_n) \in l_p$; ta đặt d(x,y) = $\sum_{n=1}^{\infty} | x_n - y_n |^p$. Khi đó ($l_p$,d) là một không gian metric tuyến tính không lồi địa phương .

Ta đặt ||x|| = $\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^p$; $\forall$ x = $(x_n) \in l_p$. Khi đó d(x,y) = ||x – y||; $\forall$ x = (x_n), y = $(y_n) \in l_p$.

Kết quả chính của bài báo này là Định lý sau:

Định lý 1. Mỗi tập lồi, giới nội trong không gian l_p (0 < p < 1) đều là một AR.

Cho X là một không gian topo, X được gọi là có tính chất điểm bất động (xem[2]) nếu với mỗi ánh xạ liên tục f từ X vào X đều có ít nhất một phần tử $x \in X$ sao cho f(x)=x.
Năm 1935, Schauder chứng minh rằng mỗi tập lồi compact trong một không gian metric tuyến tính lồi địa phương bất kỳ đều có tính chất điểm bất động và đặt ra bài toán rằng kết quả trên còn đúng hay không nếu bỏ giả thiết về tính lồi địa phương của không gian metric tuyến tính.

Trong bài báo này ta cũng chứng minh được Định lý sau:

Định lý 2. Mỗi tập lồi, compact trong không gian l_p đều có tính chất điểm bất động.

2. Chứng minh các kết quả

Trước khi chứng minh Định lý 1, ta đưa ra và chứng minh một số bổ đề cần dùng.

Bổ đề 1. Cho A là một tập con lồi, giới nội bất kỳ trong l_p thì A hoàn toàn giới nội.
(Chú ý rằng một tập con A của một không gian metric (X,d) được gọi là hoàn toàn giới nội hay hoàn toàn bị chặn nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ thì tồn tại một tập hữu hạn $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\} \subset$ A sao cho $\forall$ a $\in$ A, $\exists$ k $\in$ {1, 2, …, p}: d(a, a_k) < ε và điều này tương đương với $\forall \varepsilon^* > 0$ thì tồn tại một tập hữu hạn $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \subset$ X sao cho $\forall a \in$ A, $\exists$ k $\in$ {1, 2, …, p}: d(a, x_k) < ε^*).

Chứng minh:

Giả sử ngược lại rằng A là tập con lồi, giới nội nhưng không hoàn toàn giới nội trong l_p. Khi đó tồn tại M > 0 sao cho A là một tập con của tập B'(0,M) = {x $\in l_p$ / ||x|| $\le$ M}.

Không giảm tổng quát, (bằng cách nhân A với một hằng số khác không), ta có thể giả sử rằng tồn tại $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \in$ A mà $\| u_i - u_j \| \ge 2$ với mỗi i, j $\in$□ mà i $\ne$ j.

Ta sẽ chỉ ra rằng conv$\{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ là tập không giới nội.

Ta viết: $u_1 = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots)$,

$u_2 = (u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots)$,

…………

$u_n = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \ldots)$.

…………

Do A $\subset$ B'(0,M), ta có thể rút ra một dãy con {1n} của dãy {n} mà dãy $\{u_1^{(1n)}\}$ hội tụ đến một số $u_1^{(0)} \in$□ , ta tiếp tục rút ra một dãy con {2n} của dãy {1n} mà dãy $\{u_2^{(2n)}\}$ hội tụ đến một số $u_2^{(0)} \in \mathbb{R}$, cứ tiếp tục quá trình này và lấy dãy đường chéo $\{u_{nn}\}$ là dãy con của $\{u_n\}$.

Bằng cách thay dãy $\{u_n\}$ bởi dãy $\{u_{nn}\}$, không giảm tổng quát, ta có thể giả thiết thêm rằng dãy $\{u_n\}$ có tính chất:

$$\lim_{n\to\infty} u_1^{(n)} = u_1^{(0)},\ \lim_{n\to\infty} u_2^{(n)} = u_2^{(0)}, \ldots$$

Ta đặt:

$u_0 = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \ldots)$, khi đó $u_0 \in$ cl B'(0,M) (thật vậy, giả sử $|u_1^{(0)}|^p + |u_2^{(0)}|^p \ \ldots >$ M, khi đó tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ mà $|u_1^{(0)}|^p + |u_2^{(0)}|^p + \ldots + |u_{n_0}^{(0)}|^p > M$. Do đó tồn tại n đủ lớn để

$|u_1^{(n)}|^p + |u_2^{(n)}|^p + \ldots + |u_{n_0}^{(n)}|^p > M$. Từ đây ta suy ra được $\|u_n\| >$ M. Đây là điều vô lý).

Do đó $\|u_n - u_0\| \le$ 2M; với mỗi $n \in \mathbb{N}$. Ta đặt $f_n = u_n - u_0$; do $\|u_i - u_j\| \ge 2$ ta được $\|f_i - f_j\| \ge 2$ với mỗi i,j $\in \mathbb{N}$ mà i $\neq$ j.

Từ lập luận trên ta suy ra rằng không thể có nhiều hơn một f_n mà $\|f_n\| < 1$. Không giảm tổng quát ta có thể giả sử rằng $\|f_n\| \ge 1$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và f_n có tính chất:

Nếu viết:

$$f_1 = (f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots),$$
$$f_2 = (f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, \ldots),$$
$$\ldots\ldots$$
$$f_n = (f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \ldots),$$
$$\ldots\ldots$$

Thì

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_1^{(n)} = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} f_2^{(n)} = 0, \ldots$

Bằng phương pháp qui nạp và sử dụng (1) ta xây dựng các dãy số nguyên dương $\{m_n\}$ và $\{r_n\}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(2) $\{m_n\}$ là dãy tăng nghiêm ngặt,

(3) $\sum\limits_{i=1}^{m_n} |f_i^{(r_n)}|^p < 2^{-n-3}$,

(4) $\sum\limits_{i=m_{n+1}+1}^{\infty} |f_i^{(r_n)}|^p < 2^{-n-3}$.

(Thật vậy đầu tiên ta chọn $m_1 = 1$, tiếp đến sử dụng (1) ta chọn r_1 thỏa mãn (3), sau đó chọn $m_2 > m_1$ thỏa mãn (4) và cứ tiếp tục như vậy…)

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta đặt

$$f_{r_n 1} = (f_1^{(r_n)}, \ldots, f_{m_n}^{(r_n)}, 0, \ldots 0, 0 \ldots),$$
$$f_{r_n 2} = (0, \ldots, 0, f_{m_n+1}^{(r_n)}, \ldots, f_{m_{n+1}}^{(r_n)}, 0, \ldots),$$
$$f_{r_n 3} = (0, \ldots, 0, 0, \ldots 0, f_{m_{n+1}+1}^{(r_n)}, \ldots).$$

Khi đó

$$f_{r_n} = f_{r_n 1} + f_{r_n 2} + f_{r_n 3},$$
$$\|f_{r_n 1}\| < 2^{-n-3},\ \|f_{r_n 3}\| < 2^{-n-3}$$

và

$$\| f_{r_n 2} \| \geq 1 - \| f_{r_n 1} \| - \| f_{r_n 3} \| \geq 1 - 2^{-n-2} \geq \frac{3}{4}.$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta xét

$$\| \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} f_{r_i}) \| = \frac{1}{n^p}(\| \sum_{i=1}^{n} f_{r_n} \|) = \frac{1}{n^p}(\| \sum_{i=1}^{n} f_{r_i 1} + \sum_{i=1}^{n} f_{r_i 2} + \sum_{i=1}^{n} f_{r_i 3} \|)$$

$$\geq \frac{1}{n^p}(\| \sum_{i=1}^{n} f_{r_i 2} \| - \| \sum_{i=1}^{n} f_{r_i 1} \| - \| \sum_{i=1}^{n} f_{r_i 3} \|) \geq \frac{1}{n^p}(\| \sum_{i=1}^{n} f_{r_i 2} \| - \sum_{i=1}^{n} \| f_{r_i 1} \| - \sum_{i=1}^{n} \| f_{r_i 3} \|)$$

$$\frac{1}{n^p}(\| \sum_{i=1}^{n} f_{r_i 2} \| - \sum_{i=1}^{n} 2^{-i-3} - \sum_{i=1}^{n} 2^{-i-3}) \geq \frac{1}{n^p}(\| \sum_{i=1}^{n} f_{r_i 2} \| - \sum_{i=1}^{n} 2^{-2}).$$

Do định nghĩa của các phần tử $f_{r_i 2}$, ta được

$$\| \sum_{i=1}^{n} f_{r_i 2} \| = \sum_{i=1}^{n} \| f_{r_i 2} \| \geq n \frac{3}{4} = \frac{3n}{4}.$$

Từ đó ta có

$$\| \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} f_{r_i}) \| \geq \frac{1}{n^p}(\frac{3n}{4} - 2^{-2}) \geq \frac{3n^{1-p}}{4} - \frac{1}{4n^p}$$

nên $\lim\limits_{n\to\infty} \| \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} f_{r_i}) \| = \infty$ hay tập conv$\{ f_1, f_2, ... \}$ không thể giới nội có nghĩa là tập conv$\{ u_1, u_2, \ldots \}$ không thể giới nội. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ rằng A là tập hoàn toàn giới nội □

Cho K là một tập lồi trong một không gian tuyến tính X, một ánh xạ f từ K vào một không gian tuyến tính Y được gọi là một ánh xạ affine
nếu $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, x_2, ..., x_n \in K, \forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \geq 0$ mà $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$
thì $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)$, rõ ràng ta thấy rằng nếu K_1 là một tập con lồi của K thì ảnh của K_1 qua ánh xạ f là một tập con lồi của không gian tuyến tính Y.

Ta có

Bổ đề 2. Mỗi tập con lồi, compact trong không gian $l_p (0 < p < 1)$ thì đồng phôi affine với một tập con lồi, compact của không gian metric tuyến tính lồi địa phương $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ...$

Chứng minh:

Không gian $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ...$ là không gian topo với topo tích Tykhonoff của các đường thẳng thực. Đây là một không gian topo tuyến tính với topo có thể xác định bởi metric

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} | x_n - y_n |}{1 + | x_n - y_n |}; \forall x = (x_n), y = (y_n) \in \mathbb{R}^\infty$$

(Xem [1], trang 36).

Với mỗi r > 0, ta chọn $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{r}{2}$. Khi đó V = {x = (x_n) $\in$ $\mathbb{R}^\infty / | x_n | < \frac{r}{2.2^n}; \forall n = 1, 2, ..., n_0$} là một lân cận mở lồi của 0 trong $\mathbb{R}^\infty$ nằm trong quả cầu mở tâm tại 0 bán kính r.

Như vậy $\square^{\infty}$ là một không gian metric tuyến tính lồi địa phương.

Với mỗi $n \in \square$, cho $p_n : l_p \to \square$ là ánh xạ được xác định bởi

$$p_n(x) = x_n$$

Ở đây $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_p$ và metric trong $\square$ là metric thông thường. ta có với mỗi $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_p$, $y = \left(y_{1,} y_2, ..., y_n, ...\right) \in l_p$;

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} | x_i - y_i |^p \geq | x_n - y_n |^p .$$

Do đó mỗi $p_n : l_p \to \square$ liên tục, ánh xạ

$$P : l_p \to \square^{\infty}$$

được xác định bởi

$$P(x) = (p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x), ...)$$

với mỗi $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_p$; là ánh xạ tuyến tính liên tục.

Bây giờ cho K là một tập lồi, compact bất kỳ trong l_p, khi đó hạn chế của ánh xạ P trên K là một ánh xạ affine liên tục, đơn ánh mà K compact nên ánh xạ này là một phép nhúng đồng phôi affine của K vào $\square^{\infty}$, từ đó K đồng phôi affine với tập lồi, compact f(K) trong $\square^{\infty}$ □

Chứng minh Định lý 1.

Cho A là một tập lồi, giới nội bất kỳ trong l_p, theo Bổ đề 1, A là tập hoàn toàn giới nội, từ đó K = clA là tập con lồi, compact của l_p, Cho B là một tập con đóng trong một khôngt gian metric X và g là một ánh xạ liên tục bất kỳ từ B vào A. Khi đó Pog là ánh xạ liên tục từ B vào $\square^{\infty}$ mà $Pog(B) \subset P(A)$ (ở đây P là ánh xạ được xác định trong chứng minh Bổ đề 2). Sử dụng Định lý Dugundji ta tìm được một ánh xạ liên tục

H:X $\to \square^{\infty}$ là thác triển của Pog và $H(X) \subset$ conv $Pog(B) \subset$ convP(A) = P(A).

Gọi $P^* K \to P(K)$ là phép đồng phôi được xác định bởi $P^*(x) = P(x); \forall x \in K$. Khi đó $(P^*)^{-1} oH : X \to A$ là thác triển liên tục của g. Vậy A là thác triển tuyệt đối, từ đó A là co rút tuyệt đối□

Chứng minh Định lý 2.

Borsuk chứng minh được rằng mỗi không gian co rút tuyệt đối, compact đều có tính chất điểm bất động. Do đó theo Định lý 1, mỗi tập lồi compact trong l_p đều có tính chất điểm bất động□

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] C. Bessaga anh A.Pelczynski, *Selected topics in infinite dimensional topology,* PWN, Warszawa, 1975.

[2] R.H.Bing, *The elusive fixed point property,* The Amer. Monthly 76 (1969) pp.119 – 131.

[3] J.Dugundji and A.Granas, *Fixed point property,* I, Warszawa, 1982.