LỚP CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

ON A CLASS OF PROBLEMS SOLVABLE BY USING MEAN- VALUE THEOREMS

LÊ HOÀNG TRÍ
Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng
LÊ HOÀNH PHÒ
HV Cao học khoá 2004-2007

TÓM TẮT
Các định lý về giá trị trung bình đóng một vai trò quan trọng trong giải tích toán học, và được thường xuyên khai thác trong các kỳ thi Olympic Toán địa phương, quốc gia và quốc tế (ở cấp độ học sinh THPT hoặc sinh viên Đại học). Chúng tỏ ra là một công cụ rất hiệu lực trong việc giải các bài toán liên quan đến sự tồn tại nghiệm và các tính chất định lượng của nghiệm của nhiều dạng phương trình khác nhau. Trong bài báo này ta lần lượt khảo sát các bài toán như thế nhờ ứng dụng các định lý về giá trị trung bình trong ba lĩnh vực: liên tục, khả vi và khả tích.

ABSTRACT
Theorems of the so-called mean-value kind play an important role in mathematical analysis and are frequently exploited in regional, national and international olympiads (of high-school or university level). They are the most powerful tool in solving problems concerning the existence and quantitative property of solutions to various equations. In this paper, we investigate some kinds of problems using such theorems in the three subjects: continuity, differentiability and integrability.

1. Phương pháp sử dụng hàm số liên tục

Định lý 1.1 *Nếu hàm số f liên tục trên đoạn [a;b] và f(a).f(b) < 0 thì có ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ để f(x) = 0.*

Định lý 1.2 *Giả sử f là một hàm liên tục trên [a;b] và f(a) = A, f(b) = B. Lúc đó nếu C là một số bất kỳ nằm giữa A và B thì có ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ để f(c) = C.*

Định lý 1.3 *Nếu f là một hàm liên tục trên [a;b] thì f nhận mọi giá trị trung gian giữa giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của nó trên đoạn đó.*

Các bài toán áp dụng:

Bài toán 1: Chứng minh phương trình: $x^3 - x + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Tính tổng các luỹ thừa bậc 8 của 3 nghiệm đó.

(Olympic Việt Nam)

Giải: Xét hàm số: $y = f(x) = x^3 - x + 1$ thì f liên tục trên D = **R.**

Ta có: $f(-2) = -5 < 0;\ f(0) = 1 > 0;\ f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} < 0$ và $f(1) = 1 > 0$

nên phương trình cho có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3.

Theo định lý Viet: $x_1 + x_2 + x_3 = 0;\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1;\ x_1x_2x_3 = -1$

Ta có: $x_i^3 - x_i + 1 = 0 \Rightarrow x_i^3 = x_i - 1$

$\Rightarrow \quad x_i^5 = x_i^3 - x_i^2 = -x_i^2 + x_i - 1$ nên: $x_i^8 = 2x_i^2 - 3x_i + 2$

Do đó: $T \;= \sum_{i=1}^{3} x_i^{\,8} = 2\sum_{i=1}^{3} x_i^{\,2} - 3\sum_{i=1}^{3} x_i + 6$

$$= 2[(\sum_{i=1}^{3} x_i)^2 - 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3} x_i x_j] - 3\sum_{i=1}^{3} x_i + 6 = 10.$$

Bài toán 2: Chứng minh tập nghiệm của bất phương trình:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \ldots + \frac{70}{x-70} \geq \frac{5}{4}$$

là hợp các khoảng rời nhau và có tổng độ dài là 1988.

(Olympic Quốc tế)

Giải:Ta có: $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \ldots + \frac{70}{x-70} - \frac{5}{4} = \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} - \frac{5}{4}$

$$= \frac{\sum k \prod_{j\neq k}(x-j)}{\prod (x-j)} - \frac{5}{4} = \frac{4\sum k \prod_{j\neq k}(x-j) - 5\prod (x-j)}{4\prod (x-j)}$$

$= \frac{f(x)}{g(x)}$ với qui ước k, j = $\overline{1,70}$.

Rõ ràng g(x) = 0 có 70 nghiệm x = 1,2,..., 70

Và *f* liên tục trên **R**, $f(k).f(k+1) < 0$ với $k = \overline{1,69}$ *và* $\lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$, $f(70) > 0$ nên cũng có đủ 70 nghiệm xen kẽ là: $1 < x_1 < 2 < x_2 < \ldots < x_{69} < 70 < x_{70}$

Tổng độ dài các khoảng nghiệm của bất phương trình: $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ là:

$$S = (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + \ldots + (x_{70} - 70)$$
$$= (x_1 + x_2 + \ldots + x_{70}) - (1 + 2 + \ldots + 70)$$

Để ý đa thức f có bậc 70, hệ số cao nhất là –5 và hệ số của x^{69} là:

9(1 + 2 +... + 70)

Do đó: $S = \frac{-9(1+2+\ldots+70)}{-5} - (1 + 2 + \ldots + 70) = \frac{4}{5}.\frac{70.71}{2} = 1988.$

Bài toán 3: Cho hàm số $f: [a;b] \to [a;b]$, với $a<b$ và thoả điều kiện:

$| f(x) - f(y) | < | x - y|$, với mọi *x, y* phân biệt thuộc *[a;b]*.

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có duy nhất một nghiệm thuộc *[a;b]*.

(Olympic sinh viên)

Giải: Xét hàm số $g(x) =| f(x) - x |$ thì *g* liên tục trên *[a;b]*.

Do đó tồn tại x_0 thuộc *[a;b]* sao cho: $g(x_0) = \min_{x\in[a,b]} g(x)$ (*)

Ta sẽ chứng minh $g(x_0) = 0$. Thật vậy, giả sử $g(x_0) \neq 0$, do đó $f(x_0) \neq x_0$

Từ bất đẳng thức đã cho thì có:

$| f(f(x_0)) - f(x_0) | < | f(x_0) - x_0|$

Suy ra $g(f(x_0)) < g(x_0)$: mâu thuẫn với (*)

Vậy $g(x_0) = 0$ nghĩa là $f(x_0) = x_0$.

Giả sử phương trình $f(x) = x$ còn có nghiệm $x_1 \neq x_0$, x_1 thuộc *[a;b]* thì có ngay:

$| f(x_1) - f(x_0) | = | x_1 - x_0|$: mâu thuẫn với giả thiết.
Vậy phương trình $f(x) = x$ có duy nhất một nghiệm thuộc $[a;b]$.

2. Phương pháp sử dụng phép tính vi phân

Định lý 2.1 (Định lý ROLLE) *Cho f là một hàm liên tục trên [a;b] và khả vi trên (a;b). Nếu có f(a) = f(b) thì tồn tại* $c \in (a;b)$ *để* $f'(c) = 0$

Kết quả: giữa 2 nghiệm của phương trình $f(x)=0$ *có 1 nghiệm của phương trình* $f'(x)=0$.

Định lý 2.2 (Định lý CAUCHY) *Cho* φ *và* ψ *là liên tục trên [a;b] và khả vi trên (a;b). Lúc đó tồn tại* $c \in (a;b)$ *để:* $[\psi(b)-\psi(a)]\varphi'(c) = [\varphi(b)-\varphi(a)]\psi'(c)$

Định lý 2.3 (Định lý LAGRANGE) *Cho f là một hàm liên tục trên [a;b] và khả vi trên (a;b). Lúc đó tồn tại* $c \in (a;b)$ *để:* $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$

Các bài toán áp dụng:

Bài toán 4: Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ và không phải là hàm hằng.Cho 2 số thực $0 < a < b$. Chứng minh phương trình:

$$xf'(x) - f(x) = \frac{af(b) - bf(a)}{b-a}$$

có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;b)$.

(Olympic sinh viên)

Giải:

Xét 2 hàm số: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$; $h(x) = \frac{1}{x}$ thì g, h khả vi trên $[a;b]$

Ta có: $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$; $h'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Theo định lý Cauchy thì tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho:

$$[h(b)-h(a)]g'(x_0) = [g(b)-g(a)]h'(x_0)$$

hay $(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})\frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = (\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a})\frac{-1}{x_0^2}$.

Do đó $\frac{(a-b)(x_0 f'(x_0) - f(x_0))}{bax_0^2} = -\frac{af(b) - bf(a)}{abx_0^2}$.

Suy ra $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = \frac{af(b) - bf(a)}{b-a}$.

Vậy phương trình: $xf'(x) - f(x) = \frac{af(b) - bf(a)}{b-a}$

có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;b)$.

Bài toán 5: Cho phương trình:

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, $a_0 \neq 0$ có n nghiệm phân biệt.

Chứng minh: $(n - 1) a_1^2 > 2na_0a_2$.

(Olympic Nga)

Giải: Đặt $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, thì f khả vi vô hạn trên **R**

Vì $f(x)$ có n nghiệm phân biệt nên theo định lý Rolle thì:

$f'(x)$ có n – 1 nghiệm phân biệt

$f''(x)$ có n – 2 nghiệm phân biệt,...

$\Rightarrow$ $f^{(n-2)}(x) = \dfrac{n!}{2}a_0x^2 + (n-1)!\,a_1x + (n-2)!\,a_2$ có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó: $\Delta > 0$ nên: $((n-1)!\,a_1)^2 - 2n!\,a_0(n-2)!\,a_2 > 0$

Vậy: $(n-1)a_1^2 > 2na_0.a_2$.

Bài toán 6: Cho hàm số *f* khả vi trên *[0;1]* và thoả mãn:

*f(0)=0 ; f(1) = 1***.**

Chứng minh tồn tại 2 số phân biệt *a;b* thuộc *(0;1)* sao cho $f'(a).f'(b) = 1$.

(Olympic Hoa kỳ)

Giải: Xét hàm số $g(x)= f(x) +x - 1$ thì *g* khả vi trên *[0;1]*

Ta có: *g(0)= - 1 < 0 và g(1)= 1 >0* nên tồn tại số c thuộc *(0;1)* sao cho *g(c) =0.*

Do đó *f(c) + c -1 =0 hay f(c) = 1- c.*

Áp dụng định lý Lagrange cho *f* trên các đoạn [0;c] và [c;1] thì:

tồn tại $a\in(0;c)$ sao cho: $\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0} = f'(a)$

và tồn tại $b\in(c;1)$ sao cho: $\dfrac{f(1)-f(c)}{1-c} = f'(b)$,

nên: $f'(a).f'(b) = \dfrac{f(c)}{c}\dfrac{1-f(c)}{1-c} = \dfrac{(1-c)c}{c(1-c)} = 1$.

Vậy tồn tại 2 số phân biệt *a;b* thuộc *(0;1)* sao cho $f'(a).f'(b) = 1$.

3. Phương pháp sử dụng phép tính tích phân

Định lý 3.1: *Cho f là một hàm khả tích trên [a;b] và m,M tương ứng là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của f trên [a;b]. Lúc đó tồn tại $\mu\in[m;M]$ sao cho:*

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

Định lý 3.2: *Cho f là một hàm liên tục trên [a;b]. Lúc đó tồn tại $\xi\in[a;b]$ sao cho:*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

Các bài toán áp dụng:

Bài toán 7: Cho $a \in (0;1)$. Giả sử *f* liên tục trên đoạn *[0;1]* thoả điều kiện:

f(0) = f(1) = 0.

Chứng minh tồn tại $b \in [0;1]$ sao cho, hoặc *f(b) = f(b-a)* hoặc *f(b) = f(b+a-1)*

(Olympic sinh viên)

Giải: Ta mở rộng hàm *f* trên **R** để được hàm tuần hoàn chu kỳ *T = 1, do f(0) = f(1) = 0* nên hàm mới, vẫn kí hiệu *f*, liên tục trên **R.**

Xét hàm số: *g(x)= f(x+a) - f(x)* thì *g* liên tục trên **R**

Khi đó:

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x+a)dx - \int_0^1 f(x)dx$$

$$= \int_a^{1+a} f(x+a)dx - \int_0^1 f(x)dx = 0$$

Mà theo định lý 3.2 thì tồn tại $c \in [0;1]$ sao cho:

$\int_0^1 g(x)dx = (1-0)g(c) = g(c)$ nên $g(c)=0$

do đó $0= f(c+a) - f(c)$ nên $0 = f(c+a) - f(c) = f(c+a+n) - f(c)$ với n nguyên.

Vậy, nếu $c+a \in [0;1]$ thì chọn $b = c+a \in [0;1]$

Còn nếu $c+a > 1$ thì chọn $b = c \in [0;1]$

<u>Bài toán 8:</u> Giả sử *f* liên tục trên $[0;\frac{\pi}{2}]$ và thoả mãn: f(0) > 0, $\int_0^{\pi/2} f(x)dx < 1$.

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = \sin x$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0;\frac{\pi}{2})$

(Olympic sinh viên)

<u>Giải:</u> Xét $F(x) = f(x) - \sin x$ thì F liên tục trên $[0;\frac{\pi}{2}]$.

Khi đó: $\int_0^{\pi/2} f(x)dx < 1$ *hay* $\int_0^{\pi/2} f(x)dx - 1 < 0$

Suy ra: $\int_0^{\pi/2} [f(x) - \sin x]dx = \int_0^{\pi/2} F(x)dx < 0$

Do đó tồn tại $c \in [0;\frac{\pi}{2}]$ để $F(c) < 0$

mà $F(0)=f(0) > 0$ nên tồn tại $c_0 \in (0;\frac{\pi}{2})$ để $F(c_0) = 0$ tức là $F(x) = 0$ có nghiệm.

Vậy $f(x) = \sin x$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0;\frac{\pi}{2})$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lê Hoàng Trí, *Giáo trình Giải tích hàm nâng cao,* Đại học Đà Nẵng, 2006.

[2] Lê Hải Châu, *Các bài thi học sinh giỏi toán PTTH toàn quốc*, Nxb Giáo dục, Hà Nội, 2000.

[3] Lê Hoành Phò, *Chuyên khảo Đa thức*, Nxb Đại học Quốc gia Tp Hồ Chí Minh, 2003.

[4] Lê Hoành Phò, Nguyễn Sinh Nguyên, Nguyễn Văn Nho, *Tuyển tập các bài dự tuyển Olympic toán học quốc tế,* Nxb Giáo dục, Hà Nội, 2003.

[5] Nguyễn Văn Mậu, Lê Ngọc Lăng, Phạm Thế Long, Nguyễn Minh Tuấn, *Các đề thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc*, Nxb Giáo dục, Hà Nội, 2006.

[6] Yaglom I.M, Chentsop N.N, Shklyarsky D.O, *Selected Problems and Theorems in Elementary Mathematic*, Mir Publishers, Moscow, 1979.