



ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TS. Lê Hải Trung

Giáo trình

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TS. Lê Hải Trung (Chủ biên), TS. Chử Văn Tiệp,
PGS. TS. Nguyễn Thành Chung, TS. Trần Văn Sự

GIÁO TRÌNH PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
2025

MỤC LỤC

Lời nói đầu	5
Danh mục các ký hiệu.....	7
Chương 1. MỞ ĐẦU	9
1.1. Một số bài toán thực tế đưa về phương trình vi phân	9
1.2. Khái niệm về không gian metric	13
1.3. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm	16
Bài tập	19
Chương 2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT	21
2.1. Phân loại nghiệm	21
2.2. Phương trình với biến số phân ly và phân ly được	22
2.3. Phương trình vi phân thuần nhất và phương trình đưa được về dạng thuần nhất	23
2.4. Phương trình vi phân toàn phần	25
2.5. Thừa số tích phân	27
2.6. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một	28
2.7. Phương trình Bernoulli	29
2.8. Phương trình Darboux	30
2.9. Phương trình Riccati	31
2.10. Phương trình dạng $y = f(y')$	32
2.11. Phương trình dạng $x = f(y')$	33
2.12. Phương trình dạng $y = f(x, y')$	34
2.13. Phương trình dạng $x = f(y, y')$	34
2.14. Phương trình Clairaut	36
2.15. Một số ứng dụng	37
Bài tập	38
Chương 3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP CAO	49
3.1. Phương trình $F(x, y^{(n)}) = 0$	49
3.2. Phương trình $f(x, y', y'') = 0$	49
3.3. Phương trình $f(y, y', y'') = 0$	50
3.4. Phương trình $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$	52
3.5. Một số ứng dụng	54
Bài tập	54
Chương 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH.....	57
4.1. Định nghĩa và tính chất cơ bản	57
4.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp n với hệ số biến thiên	57

4.2.1. Tính chất của toán tử vi phân tuyến tính	58
4.2.2. Tính chất của nghiệm cho DE thuần nhất	58
4.2.3. Công thức Ostragradski – Liouville	63
4.2.4. Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất	65
4.2.5. Phương pháp biến thiên hằng số	66
4.3. Phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng	67
4.4. Một vài khái niệm về giải tích phức	69
4.5. Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất	72
4.6. Một số ứng dụng	74
4.6.1. Dao động của con lắc lò xo	74
4.6.2. Mạch điện RLC	75
Bài tập	75
Chương 5. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE	81
5.1. Định nghĩa và tính chất cơ bản	81
5.1.1. Định nghĩa phép biến đổi Laplace	81
5.1.2. Biến đổi Laplace của hàm tuần hoàn	86
5.1.3. Biến đổi Laplace của đạo hàm	87
5.1.4. Biến đổi Laplace của hàm Heaviside	88
5.2. Phép biến đổi Laplace ngược	89
5.2.1. Định nghĩa và ví dụ	89
5.2.2. Biến đổi Laplace của tích phân	92
5.3. Ứng dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân	93
5.3.1. Bài toán giá trị ban đầu	93
5.3.2. Tích chập của hai hàm số	95
5.3.3. Hàm delta Dirac	96
Bài tập	99
Chương 6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN	103
6.1. Hệ phương trình vi phân chuẩn tắc	103
6.2. Hệ phương trình vi phân đối xứng	112
6.3. Một số dạng hệ phương trình vi phân tuyến tính thường gặp	118
Bài tập	140
Chương 7. NGHIỆM SỐ CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN	143
7.1. Phương pháp Euler	143
7.1.1. Phương pháp xấp xỉ Picard	143
7.1.2. Phương pháp chuỗi Taylor	144
7.1.3. Phương pháp Euler	145

7.2. Phương pháp Euler cải tiến	148
7.3. Phương pháp Runge - Kutta	148
7.3.1. Phương pháp Runge - Kutta cổ điển (RK4)	148
7.3.2. Phương pháp đa bước	153
7.3.3. Phương pháp Euler giải hệ phương trình vi phân	158
7.3.4. Phương pháp Runge - Kutta giải hệ phương trình vi phân	159
Bài tập	162
<i>Tài liệu tham khảo</i>	165

LỜI NÓI ĐẦU

Giáo trình này được biên soạn nhằm trình bày các kiến thức nền tảng và cơ sở của môn Phương trình vi phân dành cho sinh viên ngành Sư phạm Toán. Ngoài ra, sinh viên thuộc các ngành có liên quan đến học phần Phương trình vi phân cũng có thể sử dụng giáo trình như một tài liệu tham khảo trong một phần chương trình đào tạo của mình.

Giáo trình được chia làm 7 chương: **Chương 1** nhằm giới thiệu các khái niệm mở đầu của môn Phương trình vi phân. **Chương 2** tiến hành phân loại các dạng phương trình vi phân cấp một có thể giải ra được tương ứng đối với đạo hàm (phương trình cấp một dạng $y' = f(x, y)$). **Chương 3** trình bày một số dạng phương trình vi phân cấp cao đặc biệt có thể hạ cấp để chuyển về phương trình vi phân cấp một. **Chương 4** trình bày cơ sở lý thuyết đối với phương trình vi phân cấp cao với hệ số biến và hệ số hằng, đây là chương giới thiệu các kiến thức cơ bản nhất của phương trình vi phân tuyến tính cấp cao. **Chương 5** giới thiệu phép biến đổi Laplace và ứng dụng để giải một số dạng phương trình vi phân với điều kiện đầu. Nội dung của **Chương 6** giới thiệu và phân loại hệ phương trình vi phân, đi kèm là các phương pháp giải. **Chương 7** trình bày các phương pháp số để giải phương trình vi phân.

Nội dung của giáo trình được xây dựng dựa theo Đề cương chi tiết của học phần Phương trình vi phân dành cho sinh viên ngành Sư phạm Toán. Các định lý trong giáo trình được chứng minh một cách “tự nhiên” và đơn giản nhất, đồng thời lồng ghép những ví dụ mang tính đặc thù. Cuối mỗi chương là hệ thống bài tập kèm theo lời giải, giúp người đọc có thể vận dụng lý thuyết đã học. Trong quá trình giảng dạy, giảng viên có thể lược bớt các phần chứng minh định lý và tăng cường các ví dụ minh họa.

Nhóm tác giả xin chân thành cảm ơn ThS. Lê Đan Hà đã hỗ trợ một phần trong công tác soạn thảo; TS. Trần Văn Sự đã đọc kỹ bản thảo và có nhiều đóng góp chi tiết; TS. Chử Văn Tiệp đã dành nhiều công sức trong việc biên soạn các chương 5 và chương 7; PGS.TS. Nguyễn Thành Chung đã dành nhiều tâm huyết cho chương 6 đồng thời thực hiện công tác rà soát, chỉnh sửa về cấu trúc, ngôn ngữ và đưa ra những đóng góp quý báu về giá trị khoa học để giáo trình được hoàn thiện.

Các tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc đến các thầy, cô trong Hội đồng phản biện và các bạn đồng nghiệp trong Khoa Toán - Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng đã đóng góp nhiều ý kiến và lời khuyên quý báu trong việc hoàn thành giáo trình.

Đà Nẵng, tháng 01 năm 2024
Nhóm tác giả

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{R}$	Tập hợp các số thực
$\mathbb{C}$	Tập hợp các số phức
$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclid n chiều
Ω	Tập mở khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$
$C^k(\Omega)$	Không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp k trên Ω