VỀ NGHIỆM ĐA THỨC CỦA BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TRONG ĐIỀU KIỆN CÓ ĐIỂM KIỂM TRA

ON THE POLYNOMIAL SOLUTION OF CONTROL PROBLEM ON CONDITION OF A CHECKPOINT

Lê Hải Trung, Đặng Hữu Hiền
Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

TÓM TẮT

Lý thuyết điều khiển là một bộ phận rất quan trọng đối với toán học hiện đại, trong đó các mô hình toán toán học được xem xét bằng phương trình vi phân tuyến tính hoặc phi tuyến. Một trong các mô hình trên được biểu diễn dưới dạng hệ - phương trình $\dot{x} = Bx + Du,$ với hàm trạng thái x là một hàm – vecto thuộc không gian n chiều, hàm – vecto điều khiển u thuộc không gian m chiều. Yêu cầu đặt ra đối với bài toán là ta phải đi tìm hàm u để “điều khiển” được “hệ - phương trình” từ một trạng thái đầu tiên bất kỳ đến trạng thái cuối cùng bất kỳ trước một điều kiện ràng buộc nào đó, từ đó có thể xác định được hàm trạng thái. Có nhiều cách để tiếp cận và tìm nghiệm của bài toán đã cho. Trong bài báo trình bày nghiệm của một bài toán điều khiển dưới dạng đa thức bậc năm trong điều kiện có một điểm kiểm tra.

ABSTRACT

Control theory is a very important part of modern mathematics in which mathematical models are reviewed by linear equations or nonlinear. One of the models are represented as systems –equation $\dot{x} = Bx + Du,$ with function x of n-dimensional vector space, function vector control u of m-dimensional space. Requirements set for the problem is that we must find functions u "control" is "systems –equation" from a first state to any final status before any binding a certain condition, that we can determine the function status. There are many ways to approach problems and find the solution. In this paper, we present a solution of control problem as a polynomial of five-degree on condition of a checkpoint.

1. Đặt vấn đề

Xét mô hình chuyển động được mô tả bằng hệ phương trình vi phân sau, còn được gọi là hệ dừng tuyến tính:

$$\dot{x} = Bx + Du, \tag{1}$$

với điều kiện:

$$x(0) = x^0, \tag{2}$$

$$x(T) = x^T, \tag{3}$$

trong đó, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$; B, D là các ma trận với kích thước tương ứng, $t \in [0,T],$ yêu cầu của bài toán là tìm hàm $u(t),$ dịch chuyển hệ (1) từ trạng thái (2) vào trạng thái (3). Trong [1] hàm $u(t)$ được xác định bởi:

$$u(t) = D^* e^{tB^*} (\int_0^T e^{-sB} DD^* e^{sB^*} ds)^{-1} (e^{-TB} x^T - x^0). \quad (4)$$

Trong [2] hàm $u(t)$ được xây dựng dưới dạng:

$$u(t) = D_p^+ e^{tB_p} P_r(t), \quad (5)$$

trong đó $P_r(t)$ là đa thức theo biến t, các ma trận D^+, B_p được mô tả trong [3].

Dễ thấy với cách xây dựng hàm $u(t)$ theo (4) và (5) thì quá khó để có thể khảo sát được $u(t)$.

Ý nghĩa của bài báo là xây dựng các hàm $u(t)$ và $x(t)$ của bài toán (1)-(2)-(3) dưới dạng hàm cơ bản để phục vụ cho công việc khảo sát: đó là xây dựng chúng dưới dạng đa thức.

2. Cơ sở lý thuyết

Định nghĩa 2.1. Hệ (1) được gọi là điều khiển được nếu như tồn tại hàm $u(t)$, dịch chuyển nó từ trạng thái đầu tùy ý (2) đến trạng thái tùy ý (3).

Định nghĩa 2.2. Hàm $x(t)$ được gọi là hàm trạng thái, còn hàm $u(t)$ được gọi là hàm điều khiển của bài toán (1)-(2)-(3).

Định nghĩa 2.3. Điểm $(t_1, x(t_1))$, $t_1 \in (0,T)$, được gọi là điểm kiểm tra của hệ (1).

Định lý 2.1. Hệ (1) với điều kiện (2)-(3) điều khiển được khi và chỉ khi hệ thức sau được thỏa mãn:

$$rankK = rank(D, BD, ..., B^{n-1}D) = n. \quad (6)$$

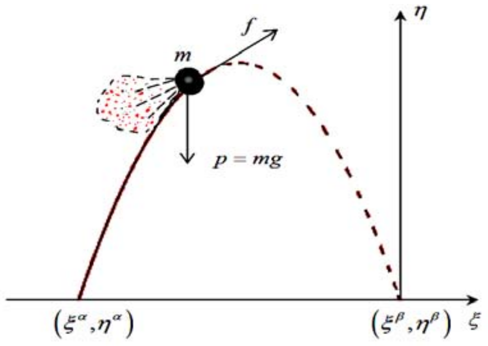
Định lý trên còn có tên gọi khác là tiêu chuẩn Kalman về tính điều khiển được của hệ dừng tuyến tính (1)-(2)-(3), được nhà bác học Kalman R. E người Hungari phát biểu và chứng minh năm 1968 (xem [1]-[2]-[3]).

Nội dung của bài báo sẽ được xây dựng trên cơ sở xem xét bài toán sau đây:

Bài toán 2.1. Xem xét chuyển động của chất điểm có khối lượng m trong mặt $\{\xi, \eta\}$ dưới tác động của trường trọng lực. Giả sử điểm m chịu sự điều khiển dưới tác động của phản lực f, xuất hiện trong kết quả của phần dời khỏi nó với khối lượng $|dm_1|$. Khi đó khối lượng của chất điểm sẽ là một hàm biến thiên $m = m(t)$ và chuyển động của nó có thể mô tả bằng phương trình vec-tơ Mexerski:

$$m\frac{dv}{dt} = p + f. \quad (7)$$

Ở đây $m - m(t) = m_0 + m_1(t)$, với $m_0 = const$ - phần khối lượng cố định của chất điểm, $m_1(t) \geq 0$ - khối lượng phản lực của chất điểm; $f = (s - v)dm_1 / dt$; v - vec-tơ vận tốc tuyệt đối của điểm m; s – vec-tơ vận tốc của phần dm_1 tại thời điểm $t + dt$ sau quá trình phân chia, như vậy $a = s - v$ là vận tốc tương đối của của phần khối lượng được tách, p – là khối lượng của nó.



Hình 1. *Chuyển động của chất điểm trong mặt phẳng* (ξ, η)

Chiếu phương trình (7) lên phương ngang và thẳng đứng của hệ trục tọa độ đã cho ta nhận được các phương trình chuyển động như sau:

$$\begin{cases} m(t)\ddot{\xi} = \dot{m}a_{\xi}(t), \\ m(t)\ddot{\eta} = \dot{m}a_{\eta}(t) - m(t)g, \end{cases} \tag{8}$$

với a_{ξ}, a_{η} là hình chiếu của a lên các phương ngang và thẳng đứng của hệ trục tọa độ. Giả sử giá trị tuyệt đối của a được cho trước và có giá trị bằng σ, khi đó hệ (8) được đưa về dạng chính tắc như sau:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = u_2 - g, \end{cases} \tag{9}$$

với $x_1 = \xi,\ x_2 = \dot{\xi},\ x_3 = \eta,\ x_4 = \dot{\eta},\ u_1 = \sigma\cos\alpha_{\xi}\dfrac{\dot{m}}{m},\ u_2 = \sigma\cos\alpha_{\eta}\dfrac{\dot{m}}{m};\ \alpha_{\xi},\ \alpha_{\eta}$ - là các góc tạo bởi vec-tơ a với các trục ξ và η, cùng với $u_1^2 + u_2^2 = \sigma^2(\dot{m}/m)^2$. Phương trình (9) được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}.$$

Do $g = const$ nên tính tổng quát của (1) trong bài toán trên được bảo toàn (thật vậy, ta có thể xét bài toán với cách đổi biến $u_1 = \hat{u}_1;\ u_2 - g = \hat{u}_2$.)

3. Kết luận

Định lý 2.2. Bài toán 2.1 là điều khiển được.

Chứng minh. Hiển nhiên với bài toán trên ta có:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B_{4\times 4};\ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D_{4\times 2}.$$

Kiểm tra (6): $rankK = rank(D, BD, ..., B^3 D) = 4 = n.$ □

Ta gán cho **Bài toán 2.1** các điều kiện:

$$X(0) = 0, X(1) = 1, X\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right). \tag{10}$$

Ta đi đến phát biểu định lý sau đây:

Định lý 2.3. Tồn tại nghiệm (hàm trạng thái) của **Bài toán 2.1** – (10) dưới dạng đa thức bậc năm.

Chứng minh. Lấy $X(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + A_4 t^4 + A_5 t^5.$ Với $A_i = [a_i, b_i, c_i, d_i]^T$, $i = 0,1,...,5.$ Yêu cầu chứng minh tương đương với việc xác định các hệ số của các đa thức trên.

Sử dụng (10) cho ta:

$$\begin{aligned} &x_1(0) = a_0 = 0, x_2(0) = b_0 = 0, \\ &x_1(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1, \\ &x_2(1) = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 1, \\ &x_1(\frac{1}{2}) = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{16}a_4 + \frac{1}{32}a_5 = \frac{1}{2}, \\ &x_2(\frac{1}{2}) = b_0 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{4}b_2 + \frac{1}{8}b_3 + \frac{1}{16}b_4 + \frac{1}{32}b_5 = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Sử dụng: $\dot{x}_1 = x_2$:

Suy ra: $a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5.$

Điều này tương đương với: $a_1 = b_0; 2a_2 = b_1; 3a_3 = b_2; 4a_4 = b_3; b_5 = 0.$

Thay các hệ thức nhận được vào (11), giải hệ nhận được tương ứng cho ta:

$$a_0 = a_1 = 0; a_2 = 10; a_3 = -29; a_4 = 32; a_5 = -12;$$

$$b_0 = b_5; 0; b_1 = 20; b_2 = -87; b_3 = 128; b_4 = -60;$$

Bằng cách đó, nghiệm của bài toán 2.1 – (10) nhận được là:

$$X(t)=\begin{pmatrix}0\\20\\0\\20\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}10\\-87\\10\\-87\end{pmatrix}t^2+\begin{pmatrix}32\\-60\\32\\-60\end{pmatrix}t^3+\begin{pmatrix}-12\\0\\-12\\0\end{pmatrix}t^5.$$

Định lý được chứng minh!

Từ kết quả nhận được dễ dàng cho ta:

$$u_1=\dot{x}_2=20-174t+384t^2-240t^3-60t^4.$$

$$u_2=\dot{x}_4+g=29{,}8-174t+384t^2-240t^3-60t^4.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Андреев Ю.Н. *Управление конечномерными линейными объектами* / М.: Наука, 1976.- 424с.

[2]. Раецкая Е.В. *Условная управляемость и наблюдаемость линейных систем*. Дисс.канд.-физ.-мат. наук. Воронеж, 2004.

[3]. Зубова С.П., Ле Хай Чунг. О полиномиальных управлениях линейной стационарной системой с контрольной точкой / Современные проблемы механики и прикладной математики. *Сборник трудов международной школы-семинара*. Воронеж, 2007.-с.133-136.