

**LÊ HẢI TRUNG**

**GIÁO TRÌNH**

**PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN – SAI PHÂN**

**Đà Nẵng, 12/2018**

# Mục lục

Lời nói đầu	5
<b>1 Một số khái niệm mở đầu</b>	<b>7</b>
1.1 Mở đầu . . . . .	7
1.2 Một số bài toán đưa về phương trình vi phân thường (NDE)	8
1.3 Khái niệm về không gian Metric. Nguyên lý co ánh xạ . .	10
1.4 Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm NDE bậc nhất .	13
<b>2 Phương trình vi phân cấp một</b>	<b>17</b>
2.1 Phân loại nghiệm của phương trình vi phân cấp một . . .	17
2.2 Phương trình với biến số phân ly . . . . .	18
2.3 Phương trình vi phân thuần nhất . . . . .	20
2.4 Phương trình đưa về dạng thuần nhất . . . . .	21
2.5 Phương trình vi phân toàn phần . . . . .	22
2.6 Thừa số tích phân . . . . .	24
2.7 Phương trình vi phân tuyến tính cấp một . . . . .	26
2.8 Phương trình Bernoulli . . . . .	27
2.9 Phương trình Darboux . . . . .	29
2.10 Phương trình Riccati . . . . .	29
2.11 Phương trình dạng $y = f(y')$ . . . . .	30
2.12 Phương trình dạng $x = f(y')$ . . . . .	32
2.13 Phương trình dạng $y = f(x, y')$ . . . . .	33
2.14 Phương trình dạng $x = f(y, y')$ . . . . .	34
2.15 Phương trình Lagrange . . . . .	34
2.16 Phương trình Clairaut (1713–1765) . . . . .	36

2.17	Bài tập chương 2 . . . . .	37
2.18	Đáp số và gợi ý bài tập chương 2 . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Phương trình vi phân tuyến tính</b>	<b>43</b>
3.1	Định nghĩa và các tính chất cơ bản . . . . .	43
3.2	Phương trình vi phân (DE) tuyến tính cấp $n$ hệ số biến thiên	44
3.2.1	Tính chất của toán tử vi phân tuyến tính . . . . .	44
3.2.2	Tính chất của nghiệm cho DE thuần nhất . . . . .	45
3.2.3	Công thức Ostragradxki – Luyvilia . . . . .	51
3.2.4	Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất	53
3.2.5	Phương pháp biến thiên hằng số . . . . .	54
3.3	Phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng . . . . .	56
3.4	Một vài khái niệm về giải tích phức . . . . .	59
3.5	Phương trình tuyến tính cấp cao hệ số hằng . . . . .	61
3.6	Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất . . . . .	63
3.7	Bài tập chương 3 . . . . .	66
3.8	Đáp số và gợi ý bài tập chương 3 . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Sai phân hữu hạn của hàm số một biến thực. Các khái niệm cơ bản của phương trình sai phân.</b>	<b>69</b>
4.1	Sai phân hữu hạn của hàm số một biến thực . . . . .	69
4.2	Các khái niệm cơ bản của phương trình sai phân . . . . .	71
4.3	Bài tập . . . . .	74
4.4	Gợi ý và trả lời. . . . .	75
<b>5</b>	<b>Phương trình sai phân cấp một</b>	<b>76</b>
5.1	Phân loại phương trình sai phân cấp một . . . . .	76
5.2	Bài tập . . . . .	81
5.3	Đáp số và gợi ý . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Phương trình sai phân tuyến tính cấp cao</b>	<b>83</b>
6.1	Hàm độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính. Định thức Casorati . . . . .	83
6.2	Phương trình sai phân tuyến tính cấp $n$ thuần nhất . . . . .	85

6.3	Phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất hệ số hằng . . . . .	87
6.4	Phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất . . . . .	93
6.5	Phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng với vế phải đặc thù . . . . .	97
<b>Tài liệu tham khảo</b>		<b>102</b>

# Lời nói đầu

Giáo trình được viết với mục đích trình bày các kiến thức nền tảng và cơ sở của môn "Phương trình vi phân – sai phân" cho sinh viên của Cử nhân Hoá. Sinh viên Cử nhân Toán cũng có thể dùng làm tài liệu tham khảo trong một phần chương trình đào tạo.

Giáo trình được chia làm 6 chương: **Chương 1** nhằm giới thiệu các khái niệm mở đầu của môn Phương trình vi phân. **Chương 2** tiến hành phân loại các dạng phương trình vi phân cấp một có thể giải ra được tương ứng đối với đạo hàm (phương trình cấp một dạng  $y' = f(x, y)$ ). **Chương 3** trình bày về phương trình vi phân cấp cao với hệ số biến và hệ số hằng, đây là chương giới thiệu các kiến thức cơ bản nhất của phương trình vi phân tuyến tính cấp cao. Trong **Chương 4** giới thiệu các khái niệm cơ bản của Phương trình sai phân. nội dung của **Chương 5** giới thiệu và phân loại các phương trình sai phân cấp một, đi kèm là các phương pháp giải. **Chương 5** phục vụ cho việc trình bày về phương trình sai phân tuyến tính cấp cao.

Nội dung của giáo trình được viết theo Đề cương chi tiết của môn "Phương trình vi phân – sai phân" dành cho sinh viên thuộc khối Cử nhân Hoá. Các định lý trong giáo trình được chứng minh một cách "tự nhiên" và đơn giản nhất, đồng thời lồng vào đó là những ví dụ mang tính đặc thù. Cuối mỗi chương là hệ thống các bài tập và lời giải để người đọc áp dụng cho phần lý thuyết đã nêu. Trong quá trình giảng dạy giáo viên cũng có thể lược bớt các phần chứng minh của định lý và cần đưa vào nhiều hơn các ví dụ minh hoạ.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc đến các thầy cô và các bạn đồng nghiệp trong Khoa Toán - Đại học Sư Phạm, Đại học Đà

Năng đã có những ý kiến và lời khuyên quý báu trong việc hoàn thành giáo trình.

Đà Nẵng, tháng 12 năm 2018

Tác giả