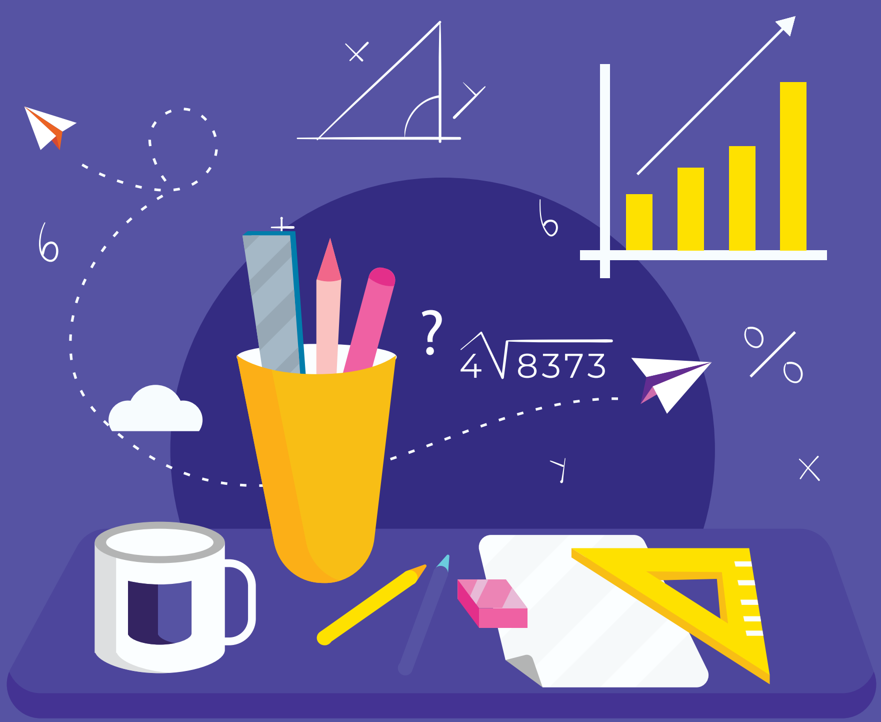
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG NHẬT QUY

GIÁO TRÌNH

ĐỘ ĐO và TÍCH PHÂN



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Hoàng Nhật Quy

Giáo trình
ĐỘ ĐO và TÍCH PHÂN

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH - 2024

LỜI NÓI ĐẦU

Trong học phần Lý thuyết độ đo và tích phân, chúng ta sẽ thấy rằng các khái niệm độ dài của đoạn thẳng, diện tích của hình phẳng, thể tích của vật thể được mở rộng thành khái niệm độ đo Lebesgue và khái niệm tích phân Riemann được mở rộng thành khái niệm tích phân Lebesgue. Tuy nhiên, trong Giáo trình Độ đo và tích phân này, chúng tôi sẽ xây dựng khái niệm độ đo và tích phân Lebesgue một cách độc lập. Và sau đó xem xét các khái niệm độ dài, diện tích, thể tích, tích phân Riemann như là những trường hợp đặc biệt. Điều này, cho phép chúng ta hiểu sâu sắc và tổng quát hơn các khái niệm đã biết và mở ra hướng tiếp cận thuận lợi đối với một số lĩnh vực của Giải tích hiện đại.

Nội dung của giáo trình được chia làm 4 chương.

Chương 1 trình bày về lý thuyết độ đo. Chúng ta sẽ thấy rằng độ đo là một trường hợp đặc biệt của hàm tập hợp. Và sau đó xây dựng khái niệm độ đo ngoài và áp dụng trên không gian $\mathbb{R}^n$ để nhận được khái niệm độ đo Lebesgue.

Chương 2 trình bày về lý thuyết hàm đo được trên một không gian đo được. Chúng ta sẽ tìm hiểu một số khái niệm hội tụ quan trọng của dãy các hàm đo được như hội tụ hầu khắp nơi, hội tụ theo độ đo và xem xét trường hợp đặc biệt về hàm đo được với giá trị vô hướng (giá trị trong $\overline{\mathbb{R}}$).

Chương 3 bao gồm các nội dung liên quan tới khái niệm tích phân Lebesgue của hàm đo được. Trong chương này ta cũng sẽ làm rõ mối quan hệ giữa tích phân Riemann và tích phân Lebesgue.

Chương 4 được dành để trình bày một số kết quả về mối liên hệ giữa tích phân Lebesgue và đạo hàm của các hàm số xác định trên một đoạn trong $\mathbb{R}$.

Ngoài ra, giáo trình còn có phần phụ lục. Nội dung của phần này bao gồm các kết quả sâu sắc liên quan tới hàm tập hợp, độ đo Borel và độ đo Radon. Đây là những nội dung quan trọng và hiện đại, nhưng được tách ra nhằm làm cho giáo trình nhẹ nhàng và có tính sư phạm hơn.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong quá trình biên soạn, nhưng có lẽ giáo trình vẫn còn sai sót, tác giả rất mong nhận được sự góp ý của bạn đọc.

Đà Nẵng, tháng 5 năm 2024

Tác giả

MỤC LỤC

BẢNG KÝ HIỆU VIẾT TẮT

$\mathbb{R}$	Tập tất cả các số thực
$\mathbb{R}^+$	Tập tất cả các số thực dương
$\overline{\mathbb{R}}^+$	$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
$\overline{\mathbb{R}}^-$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
$int(A)$	Phần trong của tập A
$supp$	Giá của độ đo hoặc của hàm số
hkn	Hầu khắp nơi
$(L)\int$	Tích phân Lebesgue
$(LS)\int$	Tích phân Lebesgue - Stieljets
$(RS)\int$	Tích phân Riemann - Stieljets
$C(X)$	Không gian các hàm số liên tục trên X
$C_c(X)$	Không gian các hàm số liên tục với giá compact trên X
CA	Phần bù của tập A

Chương 1
ĐỘ ĐO

Nội dung của chương này trình bày về lý thuyết độ đo. Chúng ta sẽ thấy rằng độ đo là một trường hợp đặc biệt của hàm tập hợp. Về lý thuyết của hàm tập hợp, bạn đọc có thể xem thêm ở phần phụ lục ở cuối cuốn sách. Sau đó, ta sẽ xây dựng khái niệm độ đo ngoài và áp dụng khái niệm này trên không gian $\mathbb{R}^n$ để nhận được khái niệm độ đo Lebesgue.

1.1. Đại số tập hợp và σ - đại số tập hợp

1.1.1. Đại số tập hợp

Định nghĩa 1.1. Cho X là tập hợp khác rỗng. Một họ $\mathcal{E}$ gồm các tập con của X được gọi là một đại số tập hợp trên X nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

(a) $X \in \mathcal{E}$;

(b) Nếu $A \in \mathcal{E}$ thì phần bù $CA := X \setminus A \in \mathcal{E}$;

(c) Nếu $A, B \in \mathcal{E}$ thì $A \cup B \in \mathcal{E}$.

Định lý 1.2. *Cho $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X. Khi đó, điều kiện (c) trong Định nghĩa 1.1 tương đương với điều kiện sau đây:*
(c') Nếu $A, B \in \mathcal{E}$ thì $A \cap B \in \mathcal{E}$.

Chứng minh. • Giả sử ta có (c): Với $A, B \in \mathcal{E}$ ta có
$$A \cap B = X \setminus (CA \cup CB).$$

Bởi (b) và (c) suy ra $A \cap B \in \mathcal{E}$, tức là (c') được thỏa mãn.

• Giả sử ta có (c'): Với $A, B \in \mathcal{E}$ ta có
$$A \cap B = X \setminus (CA \cap CB).$$

Bởi (b) và (c') suy ra $A \cup B \in \mathcal{E}$, tức là (c) được thỏa mãn.

Vậy định lý được chứng minh. □

Nhận xét 1.3. Nếu $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X thì ta có các khẳng định sau đây:

i) $\emptyset \in \mathcal{E}$.

ii) Nếu $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{E}$ thì

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{E} \quad \text{và} \quad \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{E}.$$

iii) Nếu $A, B \in \mathcal{E}$ thì $A \setminus B \in \mathcal{E}$ và $B \setminus A \in \mathcal{E}$.

Định lý 1.4. *Giao của một họ tùy ý các đại số tập hợp trên X cũng là một đại số tập hợp trên X.*

Chứng minh. Gọi $\mathcal{E}_j, j \in J$ là các đại số tập hợp trên X. Đặt

$$\mathcal{E} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{E}_j.$$

• Ta có $X \in \mathcal{E}_j$ với mọi $j \in J$ nên $X \in \mathcal{E}$, tức là điều kiện (a) Định nghĩa 1.1 được thỏa mãn.

• Nếu $A \in \mathcal{E}$ thì $A \in \mathcal{E}_j$ với mọi $j \in J$. Khi đó, $CA \in \mathcal{E}_j$ với mọi $j \in J$ vì $\mathcal{E}_j$ là đại số tập hợp. Từ đây suy ra $CA \in \mathcal{E}$, tức là điều kiện (b) Định nghĩa 1.1 được thỏa mãn.

• Giả sử $A, B \in \mathcal{E}$. Khi đó, $A, B \in \mathcal{E}_j$ với mọi $j \in J$. Từ đây suy ra $A \cup B \in \mathcal{E}_j$ với mọi $j \in J$. Do đó $A \cup B \in \mathcal{E}$, tức là điều kiện (c) Định nghĩa 1.1 được thỏa mãn.

Vậy $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X.

Vậy định lý được chứng minh. □

Nhận xét 1.5. Giả sử $\mathcal{S}$ là họ tùy ý các tập con của X. Gọi $\mathcal{P}(X)$ là họ tất cả các tập con của X. Khi đó có thể kiểm tra rằng, $\mathcal{P}(X)$ là một đại số tập hợp trên X, và gọi là đại số tập hợp lớn nhất trên X. Hiển nhiên, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Ta gọi $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ là giao của tất cả các đại số tập hợp trên X chứa họ $\mathcal{S}$, tức là

$$\mathcal{E}(\mathcal{S}) := \cap\{\mathcal{D} : \mathcal{D} \text{ là đại số tập hợp trên } X \text{ và } \mathcal{S} \subset \mathcal{D}\}.$$

Khi đó, bởi Định lý 1.4 ta có $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ là một đại số tập hợp trên X.

• Ta gọi $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ là đại số tập hợp sinh bởi họ $\mathcal{S}$.

• $\mathcal{E}(S)$ là đại số tập hợp nhỏ nhất (theo quan hệ bao hàm) chứa S.

• Họ S là một đại số tập hợp trên X nếu và chỉ nếu $\mathcal{E}(S) = S$.

1.1.2. Đại số sinh bởi các gian trong $\mathbb{R}^n$

Ta gọi $\mathcal{T}$ là họ các tập con của $\mathbb{R}$ có dạng sau

$$\mathcal{T} := \{\emptyset, [a,b], (a,b), [a,b), (a,b], [a,+\infty), (-\infty,b], (a,+\infty), (-\infty,b), \mathbb{R}\}.$$

Ta có thể kiểm tra rằng, nếu $I, J \in \mathcal{T}$ thì $I \cap J \in \mathcal{T}$ và

$$\mathbb{R} \setminus I = \begin{cases} I' \in \mathcal{T} \\ I' \cup I" \quad \text{với } I', I" \in \mathcal{T}, I' \cap I" = \emptyset. \end{cases} \tag{1.1}$$

Tập con $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là một gian trong $\mathbb{R}^n$ nếu nó có dạng sau

$$\Delta = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n, \quad I_1, I_2, ..., I_n \in \mathcal{T}.$$

Ta gọi $\mathcal{E}$ là họ tất cả các tập con trong $\mathbb{R}^n$ được biểu diễn bởi hợp hữu hạn các gian rời nhau trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó, ta có kết quả quan trọng sau đây.

Định lý 1.6. *Họ $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên $\mathbb{R}^n$.*

Chứng minh. • Chọn

$$I_1 = I_2 = ... = I_n = \mathbb{R}$$

thì ta có

$$\mathbb{R}^n = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n \in \mathcal{E},$$

tức là điều kiện (a) Định nghĩa 1.1 được thỏa mãn.

• Lấy $A, B \in \mathcal{E}$. Khi đó, A và B có thể viết dưới dạng:

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} \Delta_j \quad (\Delta_j \cap \Delta_i = \emptyset, \forall j \neq i),$$

$$B = \bigcup_{j=1}^{k} \Delta'_j \quad (\Delta'_j \cap \Delta'_i = \emptyset, \forall j \neq i),$$

trong đó, Δ_j $(j = 1, 2, ..., m)$ và Δ'_j $j = 1, 2, ..., k$ là các gian trong $\mathbb{R}^n$.

Do $\Delta_{ij} = \Delta_j \cap \Delta'_j$ là một gian trong $\mathbb{R}^n$ nên ta có

$$A \cap B = \left(\bigcup_{j=1}^{m} \Delta_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{k} \Delta'_j\right) = \bigcup_{i,j} (\Delta_i \cap \Delta'_j) = \bigcup_{i,j} \Delta_{ij} \in \mathcal{E},$$

tức là điều kiện (c') Định lý 1.2 được thỏa mãn.

• Ta kiểm tra điều kiện (b) Định nghĩa 1.1: Trước hết, với $\Delta \in \mathcal{E}$ thì $C\Delta \in \mathcal{E}$.

Thật vậy: giả sử
$$\Delta = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n.$$

Ta có
$$C\Delta = \left((\mathbb{R} \setminus I_1) \times \mathbb{R}^{n-1}\right) \bigcup \left(I_1 \times (\mathbb{R} \setminus I_2) \times \mathbb{R}^{n-2}\right) \bigcup ... \bigcup \left(I_1 \times ... \times I_{n-1} \times (\mathbb{R} \setminus I_n)\right).$$

Bởi (1.1), ta suy ra $C\Delta \in \mathcal{E}$.

Giả sử $A \in \mathcal{E}$ và
$$A = \bigcup_{j=1}^{m} \Delta_j$$
với $\Delta_j, j = 1, 2, ..., m$ là các gian rời nhau trong $\mathbb{R}^n$. Ta có
$$CA = C\left(\bigcup_{j=1}^{n} \Delta_j\right) = \bigcap_{j=1}^{n} C\Delta_j.$$

Do $C\Delta_j \in \mathcal{E}$ với mọi j nên bởi điều kiện (c') đã được chứng minh ở trên ta suy ra $CA \in \mathcal{E}$. Vậy điều kiện (b) Định nghĩa 1.1 được thỏa mãn.

Tóm lại, $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên $\mathbb{R}^n$.

Vậy định lý được chứng minh. □

Nhận xét 1.7. Đại số tập hợp $\mathcal{E}$ trong Định lý 1.6 trùng với đại số tập hợp sinh bởi các gian trong $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Gọi $\mathcal{A}$ là họ các gian trong $\mathbb{R}^n$. Do $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ và $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp nên suy ra $\mathcal{E}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E}$.

Ngược lại, lấy $A \in \mathcal{E}$ với
$$A = \bigcup_{j=1}^{m} \Delta_j.$$

Do các gian $\Delta_j \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$ nên suy ra $A \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$, tức là $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}(\mathcal{A})$. Vậy $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{A})$.

Vậy nhận xét được chứng minh. □

1.1.3. σ - đại số tập hợp

Định nghĩa 1.8. Cho X là một tập hợp khác rỗng. Họ $\mathcal{F}$ gồm các tập con của X được gọi là một σ - đại số tập hợp trên X nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

(a) $X \in \mathcal{F}$;

(b) Nếu $A \in \mathcal{F}$ thì $CA \in \mathcal{F}$;

(c) Nếu $A_j \in \mathcal{F}$ với mọi $j = 1, 2, ...$ thì

$$\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{F}.$$

Nếu $\mathcal{F}$ là một σ - đại số tập hợp trên X thì nó cũng là một đại số tập hợp trên X. Thật vậy: nếu $A, B \in \mathcal{F}$ thì bằng cách đặt $A_1 = A, A_2 = B, A_3 = A_4 = ... = \emptyset$, bởi điều kiện (a) và (c) của Định nghĩa 1.8 ta có

$$A \cup B = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{F}.$$

Tức là điều kiện (c) Định nghĩa 1.1 được thỏa mãn.

Định lý 1.9. *Cho $\mathcal{F}$ là một σ - đại số tập hợp trên X. Khi đó, điều kiện (c) Định nghĩa 1.8 tương đương với điều kiện sau:*

(c') Nếu $A_j \in \mathcal{F}$ với mọi $j = 1, 2, ...$ thì

$$\bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{F}.$$

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{F}$ là một σ - đại số tập hợp trên X. Khi đó, sự tương đương giữa (c) và (c') được suy ra từ điều kiện (b) Định nghĩa 1.8 và luật De Morgan sau đây: với $A_j \in \mathcal{F}, j = 1, 2, ...$ ta có

$$\bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j = X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} CA_j \right), \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j = X \setminus \left(\bigcap_{j=1}^{+\infty} CA_j \right).$$

Vậy định lý được chứng minh. □

Định lý 1.10. *Giao của một họ tùy ý các σ - đại số tập hợp trên X cũng là một σ - đại số tập hợp trên X.*

Chứng minh. Gọi $\mathcal{F}_j, j \in J$ là các σ - đại số tập hợp trên X. Đặt

$$\mathcal{F} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_j.$$

- Ta có $X \in \mathcal{F}_j$ với mọi $j \in J$ nên $X \in \mathcal{E}$, tức là điều kiện (a) Định nghĩa 1.8 được thỏa mãn.

• Nếu $A \in \mathcal{F}$ thì $A \in \mathcal{F}_j$ với mọi $j \in J$. Khi đó, $CA \in \mathcal{F}_j$ với mọi $j \in J$ vì $\mathcal{F}_j$ là σ - đại số tập hợp. Từ đây suy ra $CA \in \mathcal{F}$, tức là điều kiện (b) Định nghĩa 1.8 được thỏa mãn.

• Giả sử $A_j \in \mathcal{F}$ với mọi $j = 1, 2, ...$ Khi đó, $A_j \in \mathcal{F}_j$ với mọi $j \in J$. Từ đây suy ra

$$\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{F}_j$$

với mọi $j \in J$. Do đó ta có

$$\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{F},$$

tức là điều kiện (c) Định nghĩa 1.8 được thỏa mãn.

Vậy $\mathcal{F}$ là một σ - đại số tập hợp trên X.

Vậy định lý được chứng minh. □

Nhận xét 1.11. Giả sử $\mathcal{S}$ là họ tùy ý các tập con của X. Gọi $\mathcal{P}(X)$ là họ tất cả các tập con của X. Khi đó có thể kiểm tra rằng, $\mathcal{P}(X)$ là một σ - đại số tập hợp trên X. Hiển nhiên, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Ta gọi $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ là giao của tất cả các σ - đại số tập hợp trên X chứa họ $\mathcal{S}$, tức là

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) := \cap\{\mathcal{D} : \mathcal{D} \text{ là } \sigma \text{ - đại số tập hợp trên } X \text{ và } \mathcal{S} \subset \mathcal{D}\}.$$

Khi đó, bởi Định lý 1.10 ta có $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ là một σ - đại số tập hợp trên X.

• Ta gọi $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ là σ - đại số tập hợp sinh bởi họ $\mathcal{S}$.

• $\mathcal{F}(S)$ là σ - đại số tập hợp nhỏ nhất (theo quan hệ bao hàm) chứa S.

• Họ S là một σ - đại số tập hợp trên X nếu và chỉ nếu $\mathcal{F}(S) = S$.

1.1.4. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho X là một tập hợp khác rỗng. Khi đó, $\mathcal{E} = \{\emptyset, X\}$ là một σ - đại số tập hợp (và hiển nhiên cũng là đại số) trên X, và được gọi là σ - đại số tập hợp nhỏ nhất trên X.

Ví dụ 2. Cho X là tập hợp có vô hạn phần tử. Gọi $\mathcal{E}$ là họ các tập con A của X thỏa mãn A có hữu hạn phần tử hoặc CA có hữu hạn phần tử. Chứng minh rằng $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X nhưng không phải là σ - đại số tập hợp trên X.

Chứng minh. $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X. Thật vậy:

- Ta có $X \in \mathcal{E}$ vì $CX = \emptyset$ không có phần tử nào.
- Giả sử $A \in \mathcal{E}$. Khi đó ta có hai trường hợp sau có thể xảy ra:

- Nếu A hữu hạn thì $CA \in \mathcal{E}$ vì $C(CA) = A$ có hữu hạn phần tử.

- Nếu CA hữu hạn thì $CA \in \mathcal{E}$.

- Giả sử $A, B \in \mathcal{E}$. Khi đó ta có các trường hợp có thể xảy ra như sau:

- Nếu A và B đều hữu hạn thì $A \cup B$ cũng hữu hạn, và do đó $A \cup B \in \mathcal{E}$.

- Nếu CA hoặc CB hữu hạn thì $CA \cap CB$ cũng hữu hạn. Do $C(A \cup B) = CA \cap CB$ nên suy ra $A \cup B \in \mathcal{E}$.

Ta chứng minh $\mathcal{E}$ không phải là một σ - đại số trên X: Thật vậy: do X là vô hạn nên tồn tại dãy các phần tử khác nhau đôi một khác nhau thuộc X, cụ thể

$$(x_k)_{k=1}^{+\infty} \subset X.$$

Đặt

$$A_k = \{x_k\}, k = 1, 2, 3, ...$$

Khi đó ta có $A_k \in \mathcal{E}$ với mọi $k = 1, 2, 3, ...$ Tuy nhiên, tập

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{2k} \notin \mathcal{E},$$

vì cả A và CA đều có vô hạn phần tử. □

Ví dụ 3. Giả sử X là không gian tô pô. Gọi $\mathcal{B}(X)$ là σ - đại số sinh bởi họ các tập mở trong X. Khi đó, $\mathcal{B}(X)$ còn được gọi là σ - đại số Borel trên X và mỗi tập $A \in \mathcal{B}(X)$ được gọi là một tập Borel.

1.2. Độ đo trên đại số tập hợp

1.2.1. Định nghĩa và các ví dụ

Định nghĩa 1.12. Ta gọi hàm tập là ánh xạ xác định trên một họ nào đó các tập hợp và nhận giá trị thuộc một trong các tập sau đây: tập số thực $\mathbb{R}$, tập $\overline{\mathbb{R}}^+ := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tập $\overline{\mathbb{R}}^- := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, tập số phức $\mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.13. Gọi $\mathcal{S}$ là một họ các tập hợp chứa tập hợp rỗng. Hàm tập μ xác định trên $\mathcal{S}$ được gọi là cộng tính nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) Nếu $A, B \in \mathcal{S}$ và $A \cap B = \emptyset$ thì $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Nếu điều kiện (b) được thỏa mãn với mọi dãy các tập con rời nhau đôi một của $\mathcal{S}$, tức là với mọi dãy $(A_k)_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{S}$ thỏa mãn $A_k \cap A_m = \emptyset$, $\forall k \neq m$ và

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{S}$$

ta có

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k),$$

thì μ được gọi là σ - cộng tính.

Dễ thấy rằng, mọi hàm tập σ - cộng tính cũng là cộng tính.

Ví dụ 4. Giả sử X là một tập hợp có vô hạn phần tử. Gọi μ là hàm tập xác định trên $\mathcal{P}(X)$ xác định bởi, với $A \subset X$

$$\mu(A) = \begin{cases} n & \text{khi } A \text{ có } n \text{ phần tử} \\ +\infty & \text{khi } A \text{ có vô hạn phần tử.} \end{cases}$$

Khi đó, μ là hàm tập σ - cộng tính.

Chứng minh. Từ định nghĩa của μ ta có $\mu(\emptyset) = 0$. Giả sử (A_k) là một dãy trong $\mathcal{P}(X)$ thỏa mãn $A_k \cap A_m = \emptyset, \forall k \neq m$. Ta xét hai trường hợp sau đây:

• Tồn tại A_{k_0} có vô hạn phần. Khi đó ta có

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) = +\infty.$$

• A_k có hữu hạn phần tử với mọi $k = 1, 2, 3, ..$ Khi đó có hai trường hợp xảy ra là:

- Tồn tại $k_0 \geq 1$ sao cho $A_k = \emptyset$ với mọi $k > k_0$. Khi đó ta có

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{k_0} A_k\right) = \sum_{k=1}^{k_0} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

- Với mọi $k \geq 1$ đều tồn tại $m > k$ sao cho $A_m \neq \emptyset$. Khi đó, bằng cách loại các tập rỗng (do không ảnh hưởng khi lấy hợp và tính tổng) ta có thể giả sử $A_k \neq \emptyset$ với mọi $k = 1, 2, 3, ...$ Vậy ta có

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) = +\infty.$$

□

Định nghĩa 1.14. Cho $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X. Hàm tập μ xác định trên $\mathcal{E}$ được gọi là một độ đo nếu nó là σ - cộng tính, tức là với mọi dãy $(A_k)_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{E}$ thỏa mãn

$$A_k \bigcap A_m = \emptyset,\ \forall k \neq m \ \text{ và } \ \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{E}$$

ta có

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

Độ đo μ được gọi là dương nếu $\mu(A) \geq 0$ với mọi $A \in \mathcal{E}$.

Nếu μ là độ đo nhận giá trị phức thì ta có thể viết $\mu = \text{Re}\mu + i\text{Im}\mu$, trong đó $\text{Re}\mu$ và $\text{Im}\mu$ là các độ đo nhận giá trị thực. Bởi định lý Jordan (Định lý A3), một độ đo luôn được phân tích thành hiệu hai độ đo dương. Vì vậy, việc nghiên cứu độ đo bất kỳ được đưa về nghiên cứu độ đo dương. Trong cuốn giáo trình này, nếu không nói rõ cụ thể, ta luôn hiểu độ đo đang xét là độ đo dương.

Định nghĩa 1.15. Cho $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X. Độ đo $\mu : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ được gọi là:

(a) hữu hạn nếu $\mu(X) < +\infty$;

(b) σ - hữu hạn nếu tồn tại dãy tập hợp $A_j \in \mathcal{E}$ với mọi $j = 1, 2, 3, ...$ sao cho

$$X = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \ \text{ và } \ \mu(A_n) < +\infty.$$

Định nghĩa 1.16. Cho $\mathcal{F}$ là một σ - đại số tập hợp trên X. Độ đo $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ được gọi là đủ nếu mọi tập con của một tập thuộc $\mathcal{F}$ và có độ đo bằng 0 thì cũng thuộc $\mathcal{F}$ và do đó cũng có độ đo bằng 0.

Sau đây ta đưa ra một số ví dụ về độ đo.

Ví dụ 5. Cho X là tập khác rỗng. Gọi $\mathcal{E} = \{\emptyset, X\}$ và μ là hàm tập xác định trên $\mathcal{C}$ bởi

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } A = \emptyset \\ 1 & \text{nếu } A = X. \end{cases}$$

Khi đó, μ là một độ đo hữu hạn. Hơn nữa, bởi Ví dụ 1, $\mathcal{E}$ là một σ - đại số trên X và có thể kiểm tra rằng μ cũng là độ đo đủ.

Ví dụ 6. Giả sử X là tập có vô hạn phần tử. Gọi μ là hàm tập xác định trên σ - đại số $\mathcal{P}(X)$ gồm tất cả các tập con của X cho bởi

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } A = \emptyset \\ n & \text{nếu } A \text{ có } n \text{ phần tử} \\ +\infty & \text{nếu } A \text{ có vô hạn phần tử.} \end{cases}$$

Khi đó, μ là một độ đo trên $\mathcal{P}(X)$. Hơn nữa, nếu X là tập vô hạn đếm được thì μ là độ đo σ - hữu hạn nhưng không hữu hạn; nếu X là tập quá đếm được (tức là có lực lượng continum) thì μ không phải là độ đo σ - hữu hạn.

1.2.2. Các tính chất cơ bản của độ đo

Định lý 1.17. *Cho μ là một độ đo trên đại số tập hợp $\mathcal{E}$. Khi đó ta có:*

(a) Nếu $A, B \in \mathcal{E}, B \subset A$ thì $\mu(B) \leq \mu(A)$.

(b) Nếu $A, B \in \mathcal{E}, B \subset A$ và $\mu(B) < +\infty$ thì $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

(c) Nếu

$$A_j \in \mathcal{E}\ (j \geq 1), \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{E}, A \in \mathcal{E}, A \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$$

thì ta có

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j).$$

(d) Nếu

$$A_j \in \mathcal{E}\ (j \geq 1), \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{E}, A_j \bigcap A_k = \emptyset, \forall j \neq k, A \in \mathcal{E}, \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \subset A$$

thì ta có

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j) \leq \mu(A).$$

Chứng minh. (a) Vì $B \subset A$ nên ta có $A = B \cup (A \setminus B)$. Bởi tính cộng tính của μ nên ta có

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) \geq \mu(B).$$

(b) Tương tự câu (a) ta có

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B). \tag{1.2}$$

Nếu $\mu(A) = +\infty$ thì bởi $\mu(B) < +\infty$ nên suy ra $\mu(A \setminus B) = +\infty$. Vì vậy ta có

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) = +\infty.$$

Nếu $\mu(A) < +\infty$ thì bởi $\mu(B) < +\infty$ nên từ (1.2) ta suy ra

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B).$$

(c) Trước hết ta chứng minh kết quả sau: với mọi dãy $(B_j) \subset \mathcal{E}$ ta luôn xây dựng được dãy rời nhau đôi một $(B'_j) \subset \mathcal{E}$ sao cho:

$$B'_j \subset B_j,\ \forall j \geq 1 \ \text{ và } \ \bigcup_{j=1}^{+\infty} B'_j = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j.$$

Thật vậy: Đặt

$$B'_1 = B_1, B'_2 = B_2 \setminus B'_1, B'_3 = B_3 \setminus (B'_1 \cup B'_2), B'_j = B_j \setminus (\bigcup_{k=1}^{j-1} B'_k).$$

Khi đó, ta dễ thấy rằng $B'_j \in \mathcal{E}, B'_j \subset B_j,\ \forall j \geq 1,\ B'_j \cap B'_k = \emptyset,\ \forall j \neq k$ và

$$\bigcup_{j=1}^{+\infty} B'_j \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j.$$

Lấy

$$x \in \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j.$$

Gọi j_0 là chỉ số nhỏ nhất mà $x \in B_{j_0}$ và $x \notin B_j,\ \forall j < j_0$. Từ đây suy ra $x \notin B'_j,\ \forall j < j_0$ và do đó

$$x \in B_{j_0} \setminus \bigcup_{k=1}^{j_0-1} B'_k = B'_{j_0}.$$

Tức là
$$x \in \bigcup_{j=1}^{+\infty} B'_j.$$
Vậy ta có
$$\bigcup_{j=1}^{+\infty} B'_j = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j.$$
Vậy dãy (B'_j) đã được xây dựng xong.

Bây giờ ta sẽ chứng minh (c): do
$$A \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$$
kết hợp với (a) ta có
$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\right). \tag{1.3}$$

Gọi $(A'_j) \subset \mathcal{E}$ là dãy được xây dựng như trên. Khi đó, bởi tính σ - đại số của độ đo μ ta có
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A'_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A'_j) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j). \tag{1.4}$$

Từ (1.3) và (1.4) ta suy ra
$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j).$$

Vậy (c) được chứng minh.

(d) Do dãy (A_j) là đôi một rời nhau và $\mathcal{E}$ là đại số tập hợp nên với mọi $n \geq 1$ ta có
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

Bởi câu (a) ta có
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\right) \leq \mu(A).$$

Suy ra

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) \leq \mu(A).$$

Cho $n \to +\infty$ ta nhận được

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j) \leq \mu(A).$$

Vậy (d) được chứng minh.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Định nghĩa 1.18. Cho (A_n) là một dãy các tập con của tập hợp X. Ta gọi giới hạn trên của dãy (A_n), ký hiệu là $\limsup_{n\to+\infty} A_n$, là tập hợp được xác định bởi công thức sau

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{n+k} = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k.$$

Ta gọi giới hạn dưới của dãy (A_n), ký hiệu $\liminf_{n\to+\infty} A_n$, là tập hợp được xác định bởi công thức sau

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_{n+k} = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k.$$

Nếu

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\to+\infty} A_n = A$$

thì ta gọi A là giới hạn của dãy (A_n) và ký hiệu là $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$.

Nhận xét 1.19. Đối với các dãy tập con đơn điệu ta có các khẳng định sau

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \begin{cases} \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n & \text{nếu } A_1 \subset A_2 \subset ... \\ \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n & \text{nếu } A_1 \supset A_2 \supset ... \end{cases}$$

Chứng minh. • Nếu $A_1 \subset A_2 \subset ...$ thì ta có

$$\bigcup_{k=m}^{+\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \ \text{ và } \ \bigcap_{k=m}^{+\infty} A_k = A_m\ , \quad \forall m \geq 1.$$

Từ đó suy ra

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

tức là

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

• Nếu $A_1 \supset A_2 \supset ...$ thì ta có

$$\bigcup_{k=m}^{+\infty} A_k = A_m \quad \text{và} \quad \bigcap_{k=m}^{+\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \; , \quad \forall m \geq 1.$$

Từ đó suy ra

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

tức là

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \cap_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Vậy nhận xét được chứng minh. □

Định lý 1.20. *Cho $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X và $\mu : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ là một độ đo. Khi đó ta có các mệnh đề sau:*

(a) Nếu $(A_n) \subset \mathcal{E}$ là một dãy tăng và thỏa mãn

$$\lim_{n\to+\infty} A_n \in \mathcal{E}$$

thì

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right).$$

(b) Nếu $(A_n) \subset \mathcal{E}$ là một dãy giảm với $\mu(A_1) < +\infty$ và thỏa mãn

$$\lim_{n\to+\infty} A_n \in \mathcal{E}$$

thì

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right).$$

Chứng minh. (a) • Giả sử tồn tại $n_0 \geq 1$ sao cho $\mu(A_{n_0}) = +\infty$. Khi đó ta có $\mu(A_n) = +\infty$ với mọi $n \geq n_0$. Từ đây suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = +\infty. \tag{1.5}$$

Mặt khác, bởi Nhận xét 1.19 ta có

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \supset A_{n_0}.$$

Từ đây suy ra

$$+\infty = \mu(A_{n_0}) \leq \mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right) \Rightarrow \mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right) = +\infty. \tag{1.6}$$

Từ (1.5) và (1.6) suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right) = +\infty.$$

• Giả sử $\mu(A_n) < +\infty$ với mọi $n \geq 1$. Bởi Nhận xét 1.19 và tính tăng của dãy (A_n) ta có

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup \left(\bigcup_{n=2}^{+\infty}(A_n \setminus A_{n-1})\right).$$

Điều này cùng với tính σ - cộng tính của μ và Định lý 1.17 ta có

$$\begin{aligned}
\mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right) &= \mu\left[A_1 \cup \left(\bigcup_{n=2}^{+\infty}(A_n \setminus A_{n-1})\right)\right] \\
&= \mu(A_1) + \mu\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty}(A_n \setminus A_{n-1})\right) \\
&= \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) \\
&= \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{+\infty}(\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

(b) Do (A_n) là dãy giảm nên bởi Nhận xét 1.19 ta có

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \subset A_1.$$

Suy ra

$$\mu(\lim_{n\to+\infty} A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \mu(A_1) < +\infty.$$

Đặt $B_n = A_1 \setminus A_n$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó ta có (B_n) là dãy tăng. Hơn nữa, bởi Nhận xét 1.19 và giả thiết ta có

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \setminus (\lim_{n\to+\infty} A_n) \in \mathcal{E}.$$

Suy ra

$$\mu\left(\lim_{n\to+\infty} B_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right). \tag{1.7}$$

Mặt khác, áp dụng câu (a) ta có

$$\mu\left(\lim_{n\to+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to+\infty} A_n. \tag{1.8}$$

Từ (1.7) và (1.8) suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right).$$

Vậy định lý được chứng minh. □

Định lý 1.21. *Cho $\mu : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ là một hàm tập cộng tính trên đại số tập hợp $\mathcal{E}$. Nếu*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right)$$

với mọi dãy tăng $(A_n) \subset \mathcal{E}$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to+\infty} A_n \in \mathcal{E}$$

thì μ là một độ đo.

Chứng minh. Để chứng minh μ là độ đo trên $\mathcal{E}$ ta sẽ chứng minh nó là σ - cộng tính. Thật vậy: Lấy (A_n) là dãy các tập rời nhau đôi một trong $\mathcal{E}$ và thỏa mãn

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{E}.$$

Đặt

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \forall n = 1, 2, 3, ...$$

Khi đó, (B_n) là dãy tăng các tập trong $\mathcal{E}$ và thỏa mãn

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Áp dụng giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right)\\
&= \mu\left(\lim_{n\to+\infty} B_n\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_n\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_n)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

Vậy μ là một độ đo trên $\mathcal{E}$.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

1.3. Tập đo được và độ đo cảm sinh bởi độ đo ngoài

1.3.1. Độ đo ngoài

Định nghĩa 1.22. Cho X là một tập hợp khác rỗng. Khi đó hàm tập $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ được gọi là một độ đo ngoài nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

ii) μ^* là σ - cộng tính dưới, tức là

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n);$$

iii) μ^* là hàm tăng: $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ với mọi $A, B \in \mathcal{E}, A \subset B$.

Ví dụ 7. Cho $X = \{a, b\}$. Gọi μ^* là hàm tập xác định bởi

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } A = \emptyset \\ n + \frac{1}{n} & \text{nếu } A \text{ có } n \text{ phần tử.} \end{cases}$$

Khi đó, μ^* là một độ đo ngoài nhưng không phải là một độ đo trên $\mathcal{P}(X)$.

Chứng minh. Ta dễ thấy rằng μ^* thỏa mãn $i)$ và $iii)$. Đặt

$$A = \{a\}, B = \{b\}.$$

Ta có

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = (1+1) + (1+1) = 4. \tag{1.9}$$

Và

$$\mu^*(A \cup B) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \tag{1.10}$$

Từ (1.9) và (1.10) suy ra

$$\mu^*(A \cup B) < \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

tức là μ^* là cộng tính dưới (thỏa mãn $ii)$). Vậy μ^* là một độ đo ngoài.

Mặt khác, từ đó cũng suy ra μ^* không thỏa mãn tính chất cộng tính, do đó μ^* không phải là độ đo. □

Ví dụ 8. Cho X là một tập hợp có vô hạn phần tử. Khi đó $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ là hàm tập xác định bởi

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } A = \emptyset \\ n + \frac{1}{n} & \text{nếu } A \text{ có } n \text{ phần tử} \\ +\infty & \text{nếu } A \text{ có vô hạn phần tử.} \end{cases}$$

Khi đó, μ^* là một độ đo ngoài.

Chứng minh. Dễ thấy μ^* thỏa mãn điều kiện $i)$ và $iii)$. Giả sử (A_n) là một dãy tập hợp bất kỳ trong $\mathcal{P}(X)$. Ta xét các trường hợp sau đây:

• Nếu tồn tại A_{n_0} có vô hạn phần tử thì ta có

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = +\infty$$

và

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) \geq \mu^*(A_{n_0}) = +\infty.$$

Từ đó suy ra $ii)$ được thỏa mãn.

• Nếu A_n đều có hữu hạn phần tử với mọi $n \geq 1$ thì sẽ có hai trường hợp xảy ra như sau:

- Tồn tại $n_0 \geq 1$ sao cho $A_n = \emptyset$ với mọi $n > n_0$. Khi đó, gọi a_k là số phần tử của tập A_k với mọi $k = 1, 2, ..., n_0$. Ta có

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) &= \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n_0} A_k\right) \\
&= a_1 + a_2 + ... + a_{n_0} + \frac{1}{a_1 + a_2 + ... + a_{n_0}} \\
&\le (a_1 + \frac{1}{a_1}) + (a_2 + \frac{1}{a_2}) + ... + (a_{n_0} + \frac{1}{a_{n_0}}) \\
&= \sum_{k=1}^{n_0} \mu^*(A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A_k).
\end{aligned}$$

- Với mọi $n \ge 1$ luôn tồn tại $m > n$ sao cho $A_m \ne \emptyset$. Khi đó, bằng cách loại bỏ đi các tập rỗng ta có thể giả sử $A_n \ne \emptyset$ với mọi $n \ge 1$. Lúc này ta có

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) = +\infty.$$

Tóm lại, $ii)$ được thỏa mãn và μ^* là độ đo ngoài trên $\mathcal{P}(X)$. $\square$

1.3.2. Tập μ^* - đo được và độ đo sinh bởi độ đo ngoài

Định nghĩa 1.23. Cho $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ là một độ đo ngoài trên $\mathcal{P}(X)$. Khi đó, tập $E \in \mathcal{P}(X)$ được gọi là μ^* - đo được nếu thỏa mãn

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap CE) \quad \forall A \in \mathcal{P}(X). \tag{1.11}$$

Nhận xét 1.24. Bởi tính σ - cộng tính dưới của μ^*, nên với mọi $A \in \mathcal{P}(X)$ ta luôn có:

$$\mu^*(A) \le \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap CE).$$

Do đó, để chứng minh đẳng thức (1.11), ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau

$$\mu^*(A) \ge \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap CE) \quad \forall A \in \mathcal{P}(X).$$

Định lý 1.25. *Cho μ^* là một độ đo ngoài trên $\mathcal{P}(X)$ và gọi $\mathcal{F}$ là họ tất cả các tập con μ^* - đo được của X. Khi đó, $\mathcal{F}$ là một σ - đại số trên X và hạn chế của μ^* lên $\mathcal{F}$ là một độ đo.*

Chứng minh. • Trước hết, ta chứng minh $\mathcal{F}$ là một đại số tập hợp:

- Tập $X \in \mathcal{F}$ vì với mọi $A \in \mathcal{P}(X)$ ta có

$$\mu^*(A \cap X) + \mu^*(A \cap CX) = \mu^*(A) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(A).$$

- Giả sử $E \in \mathcal{F}$. Khi đó, với mọi $A \in \mathcal{P}(X)$ ta có

$$\mu^*(A \cap CE) + \mu^*(A \cap C(CE)) = \mu^*(A \cap CE) + \mu^*(A \cap E) = \mu^*(A).$$

Điều này chứng tỏ $CE \in \mathcal{F}$.

- Giả sử $E, F \in \mathcal{F}$. Ta sẽ chứng minh $E \cup F \in \mathcal{F}$.

Thật vậy: Do $E, F \in \mathcal{F}$ ta có

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap CE),\ \forall A \in \mathcal{F}. \tag{1.12}$$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap CF),\ \forall A \in \mathcal{F}. \tag{1.13}$$

Từ (1.13) ta thay A bởi các tập $A \cap E$ và $A \cap CE$ ta có

$$\mu^*(A \cap E) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap CF). \tag{1.14}$$

$$\mu^*(A \cap CE) = \mu^*(A \cap CE \cap F) + \mu^*(A \cap CE \cap CF). \tag{1.15}$$

Thay (1.14) và (1.15) vào (1.12) ta có

$$\begin{aligned}\mu^*(A) =& \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap CF) \\ &+ \mu^*(A \cap CE \cap F) + \mu^*(A \cap CE \cap CF).\end{aligned} \tag{1.16}$$

Từ (1.16) thay A bởi $A \cap (E \cup F)$, với chú ý

$$A \cap (E \cup F) \cap E \cap F = A \cap E \cap F$$

$$A \cap (E \cup F) \cap E \cap CF = A \cap E \cap CF$$

$$A \cap (E \cup F) \cap CE \cap F = A \cap F \cap CE$$

$$A \cap (E \cup F) \cap CE \cap CF = \emptyset$$

ta thu được

$$\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap CF) + \mu^*(A \cap F \cap CE). \tag{1.17}$$

Kết hợp (1.16) và (1.17) ta thu được

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap CE \cap CF),\ \forall A \in \mathcal{F}.$$

Điều này chứng tỏ $E \cup F \in \mathcal{F}$.

• Bây giờ, ta sẽ chứng minh $\mathcal{F}$ là σ - đại số tập hợp:
Giả sử (E_n) là dãy tập hợp tùy ý trong $\mathcal{F}$. Ta sẽ chứng minh đẳng thức sau

đây
$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{F}.$$

Do từ mỗi dãy tập hợp bất kỳ trong một đại số tập hợp ta luôn có thể xây dựng được dãy mới gồm các tập rời nhau đôi một và có hợp không thay đổi (xem chứng minh Định lý 1.17(c)) nên ta có thể giả sử trực tiếp rằng dãy (E_n) rời nhau đôi một.

Từ công thức (1.17), nếu giả thiết thêm $E \cap F = \emptyset$ ta có
$$\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F). \tag{1.18}$$

Từ công thức (1.18), bằng quy nạp và bởi $\mathcal{F}$ là đại số tập hợp, ta có thể chứng minh được kết quả sau đây:
$$\mu^*(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{m} E_n)\right) = \sum_{n=1}^{m} \mu^*(A \cap E_n),\ \forall m \geq 1. \tag{1.19}$$

Đặt
$$\bigcup_{n=1}^{m} E_n = F_m.$$

Do $F_m \in \mathcal{F}, F_m \subset E$ với mọi $m \geq 1$ nên từ (1.19) và tính tăng của μ^* ta có
$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_m) + \mu^*(A \cap CF_m)\\ &\geq \sum_{n=1}^{m} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap CE),\ \forall A \in \mathcal{P}(X).\end{aligned}$$

Cho $m \to +\infty$ ta thu được
$$\mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap CE). \tag{1.20}$$

Bởi tính σ - cộng tính dưới của μ^* nên ta có
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_n) \geq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(A \cap E_n)\right) = \mu^*\left(A \cap E\right). \tag{1.21}$$

Từ (1.20) và (1.21) ta suy ra
$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap CE).$$

Từ đây và bởi Nhận xét 1.24 ta thu được

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap CE),\ \forall A \in \mathcal{F}.$$

Điều này chứng tỏ $E \in \mathcal{F}$. Vậy $\mathcal{F}$ là σ - đại số tập hợp.

• Cuối cùng, ta sẽ chứng minh $\mu^*|_{\mathcal{F}}$ là một độ đo trên $\mathcal{F}$:

Từ (9), nếu ta thay A bởi $\cup_{n=1}^{+\infty} E_n$ thì ta sẽ thu được

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(E_n).$$

Điều này kết hợp với tính σ - cộng tính dưới của μ^* ta thu được

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(E_n).$$

Điều này chứng tỏ μ^* hạn chế trên $\mathcal{F}$ có tính σ - cộng tính, tức là nó là một độ đo trên $\mathcal{F}$.

Vậy định lý được chứng minh. □

Độ đo $\nu := \mu^*|_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ xác định như trong Định lý 1.25 được gọi là độ đo cảm sinh bởi độ đo ngoài μ^*.

Kết quả sau đây cho ta một số tính chất cơ bản của độ đo cảm sinh ν.

Định lý 1.26. *Tập con E của X là μ^* - đo được với $\nu(E) = 0$ nếu và chỉ nếu $\mu^*(E) = 0$. Từ đây suy ra ν là một độ đo đủ trên $\mathcal{F}$.*

Chứng minh. • "$\Rightarrow$": Nếu E là tập μ^* - đo được, tức là $E \in \mathcal{F}$, và thỏa mãn $\nu(E) = 0$ thì $\mu^*(E) = \nu(E) = 0$.

• "$\Leftarrow$": Giả sử $E \subset X$ và $\mu^*(E) = 0$. Khi đó, với mọi $A \in \mathcal{P}(X)$ ta có $A \cap E \subset E$ và $A \cap CE \subset E$. Bởi tính tăng của μ^* ta có $\mu^*(A \cap E) = \mu^*(A \cap CE) = 0$. Từ đây suy ra

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap CE) = 0.$$

Bởi Nhận xét 1.24 ta suy ra

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap CE).$$

Điều này có nghĩa là E là tập μ^* - đo được và $\nu(E) = \mu^*(E) = 0$.

Vậy định lý được chứng minh. □

1.4. Thác triển độ đo từ một đại số lên một σ - đại số

Định lý 1.27. *Cho $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X và $\mu : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ là một độ đo. Khi đó, hàm tập μ^* xác định như sau:*

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, A_n \in \mathcal{E}\}, \ \forall E \in \mathcal{P}(X),$$

là một độ đo ngoài trên $\mathcal{P}(X)$.

Chứng minh. • Dễ thấy rằng $\mu^*(\emptyset) = 0$.

• Ta chứng minh tính tăng của độ đo ngoài: Giả sử $E \subset F$. Khi đó, nếu dãy $(A_n) \subset \mathcal{E}$ thỏa mãn

$$F \subset \bigcup_n A_n$$

thì ta có

$$E \subset \bigcup_n A_n.$$

Do đó, bởi định nghĩa của inf ta suy ra $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$.

• Ta chứng minh tính σ - cộng tính dưới của độ đo ngoài: Giả sử (E_n) là dãy tập con bất kỳ trong $\mathcal{P}(X)$.

Lấy $\epsilon > 0$ bất kỳ. Với mỗi E_n, bởi định nghĩa của inf, tồn tại dãy tập hợp $(A_{n_k})_k \subset \mathcal{E}$ thỏa mãn:

$$E_n \subset \bigcup_k A_{n_k}. \tag{1.22}$$

$$\mu^*(E_n) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_{n_k}) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}. \tag{1.23}$$

Từ (1.23) suy ra

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_{n_k}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(E_n) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(E_n) + \epsilon. \tag{1.24}$$

Từ (1.22) suy ra

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{n_k}.$$

Từ đây và bởi định nghĩa của μ^* và (1.24) ta suy ra

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_{n_k}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(E_n) + \epsilon.$$

Cuối cùng, cho $\epsilon \downarrow 0$ ta thu được

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(E_n).$$

Vậy μ^* là một độ đo ngoài.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Định lý 1.28. *Cho $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X. Khi đó, mọi độ đo $\mu : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ luôn có thể thác triển thành một độ đo đủ xác định trên một σ - đại số $\mathcal{F}_\mu$ chứa $\mathcal{E}$, tức là tồn tại một độ đo đủ $\bar{\mu} : \mathcal{F}_\mu \to \overline{\mathbb{R}}^+$ sao cho*

$$\bar{\mu}(E) = \mu(E),\ \forall E \in \mathcal{E}.$$

Chứng minh. • Do $\mu : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ độ đo trên đại số tập hợp $\mathcal{E}$ nên bởi Định lý 1.27, ta gọi μ^* độ đo ngoài tương ứng với μ. Gọi $\mathcal{F}_\mu$ là họ các tập con μ^* - đo được của X. Bởi Định lý 1.25, $\mathcal{F}_\mu$ là một σ - đại số tập hợp trên X và hơn nữa

$$\bar{\mu} := \mu^*|_{\mathcal{F}_\mu} : \mathcal{F}_\mu \to \overline{\mathbb{R}}^+$$

là một độ đo. Bởi Định lý 1.26, $\bar{\mu}$ là một độ đo đủ trên $\mathcal{F}_\mu$.

• Ta chứng minh $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}_\mu$: Lấy $E \in \mathcal{E}$. Gọi A là một tập con bất kỳ của X và $\epsilon > 0$ là số dương nhỏ tùy ý. Bởi định nghĩa $\mu^*(A)$ (Định lý 1.27), tồn tại dãy tập hợp $(A_n) \subset \mathcal{E}$ thỏa mãn $A \subset \cup_n A_n$ và

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \epsilon.$$

Ta có

$$A \cap E \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \cup E \text{ và } A \cap CE \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \cap CE,\ A \cap E \in \mathcal{E}, A \cap CE \in \mathcal{E}.$$

Do đó tiếp tục áp dụng định nghĩa của μ^* ta có

$$\begin{aligned}\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap CE) &\le \sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n\cap E)+\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n\cap CE)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\mu(A_n\cap E)+\mu(A_n\cap CE)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n)\\ &\le \sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n)\\ &\le \mu^*(A)+\epsilon.\end{aligned}$$

Cho $\epsilon\downarrow 0$ ta thu được

$$\mu^*(A)\ge \mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap CE).$$

Bởi Nhận xét 1.24, ta có

$$\mu^*(A)= \mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap CE).$$

Tức là E là tập μ^* - đo được. Vậy $\mathcal{E}\subset\mathcal{F}_\mu$.

• Cuối cùng, ta chứng minh $\mu(E)=\bar{\mu}(E)$ với mọi $E\in\mathcal{E}$.

Thật vậy: Lấy $E\in\mathcal{E}$. Đặt $A_1=E, A_2=A_3=...=\emptyset$. Khi đó, ta có dãy (A_n) thỏa mãn

$$(A_n)\subset\mathcal{E}\ \text{ và }\ E\subset\bigcup_n A_n.$$

Do đó

$$\bar{\mu}(E)=\mu^*(E)\le\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n)=\mu(E). \tag{1.25}$$

Mặt khác, với mọi dãy (A_n) thỏa mãn

$$(A_n)\subset\mathcal{E}\ \text{ và }\ E\subset\bigcup_n A_n.$$

Bởi Định lý 1.17(c), ta có

$$\mu(E)\le\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n).$$

Do đó, bởi định nghĩa của μ^* ta có

$$\mu(E) \leq \mu^*(E). \tag{1.26}$$

Từ (1.25) và (1.26) ta suy ra $\mu(E) = \bar{\mu}(E)$.

Vậy định lý được chứng minh. □

Nhận xét sau đây là sự cụ thể hóa của Định lý 1.28 trong việc thác triển một độ đo từ đại số tập hợp lên σ - đại số tập hợp.

Nhận xét 1.29. Từ các kết quả ở mục này, ta tổng kết thành quy trình thác triển độ đo từ một đại số tập hợp lên một σ - đại số tập hợp như sau: cho μ là một độ đo trên đại số tập hợp $\mathcal{E}$

Bước 1: Xác định độ đo ngoài μ^* tương ứng với μ theo Định lý 1.27;

Bước 2: Xác định σ - đại số $\mathcal{F}_\mu$ bao gồm tất cả các tập μ^* - đo được theo Định lý 1.25;

Bước 3: Đặt $\overline{\mu} := \mu^*|_{\mathcal{F}_\mu}$. Bởi Định lý 1.25 ta suy ra $\overline{\mu}$ là độ cần tìm.

Chú ý 1.30. Với các giả thiết như trong Định lý 1.28, nếu gọi $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ là σ - đại số tập hợp sinh bởi $\mathcal{E}$ thì ta có $\mathcal{F}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}_\mu$.

1.5. Độ đo Borel và độ đo Radon

Cho X là một không gian tô pô. Gọi $\mathcal{B}(X)$ là σ - đại số Borel sinh bởi họ các tập mở trong X (xem thêm Ví dụ 3). Sau đây ta sẽ phát biểu định nghĩa và nghiên cứu một số tính chất cơ bản của hai độ đo quan trọng trên không gian tô pô X đó là độ đo Borel[1] và độ đo Radon[2].

Định nghĩa 1.31. (a) Một độ đo dương xác định trên σ - đại số Borel $\mathcal{B}(X)$ được gọi là một độ đo Borel.

(b) Một độ đo Borel μ thỏa mãn $\mu(K) < +\infty$ với mọi tập compact $K \subset X$ được gọi là độ đo Radon.

Định nghĩa 1.32. Cho μ là một độ đo Borel trên không gian tô pô X. Ta gọi giá của μ, ký hiệu là suppμ, gồm tất cả các điểm $x \in X$ sao cho $\mu(U) > 0$ với mọi lân cận mở U của x. Ta có thể viết

$$\text{supp}\mu = \{x \in X : \mu(U) > 0, \text{ với mọi lân cận } U \text{ của } x\}.$$

Nhận xét 1.33. *Supp*μ là một tập đóng trong X.

---

[1]Khái niệm độ đo Borel đặt theo tên nhà toán học người Pháp: Émile Borel (1871 - 1956)

[2]Khái niệm độ đo Radon đặt theo tên nhà toán học người Austria: Johann Radon (1887 - 1956)

Chứng minh. Bởi định nghĩa $supp\mu$ ta có, $x \in X \setminus supp\mu$ nếu và chỉ nếu tồn tại lân cận U của x sao cho $\mu(U) = 0$. Ta có thể giả sử U là lân cận mở của x. Khi đó, với mọi $y \in U$, tồn tại lân cận V của y sao cho $V \subset U$. Vì vậy

$$0 \leq \mu(V) \leq \mu(U) = 0 \Rightarrow \mu(V) = 0.$$

Tức là $y \in X \setminus supp\mu$. Suy ra $U \subset X \setminus supp\mu$. Vậy $X \setminus supp\mu$ là tập mở hay $supp\mu$ là tập đóng trong X.

Vậy nhận xét được chứng minh. □

Nếu X là một không gian tô pô với cơ sở đếm được thì ta có kết quả đặc biệt hơn như sau.

Định lý 1.34. *Cho X là một không gian tô pô với cơ sở đếm được và μ là một độ đo Borel trên X. Khi đó, $supp\mu$ là tập đóng nhỏ nhất trong X sao cho $\mu(X \setminus supp\mu) = 0$.*

Chứng minh. Gọi $(U_n)_{n\geq 1}$ là cơ sở đếm được các tập mở của X. Khi đó, ta có

$$X \setminus \text{supp}\mu = \bigcup_n \{U_n : \mu(U_n) = 0\}.$$

Bởi tính chất σ-cộng tính dưới của độ đo (Định lý 1.17(c)) ta suy ra $\mu(X \setminus \text{supp}\mu) = 0$.

Giả sử F là một tập con đóng của X sao cho $\mu(X \setminus F) = 0$. Lấy $x \in X \setminus F$. Do $X \setminus F$ là tập mở nên tồn tại U_n sao cho

$$x \in U_n \subset X \setminus F.$$

Suy ra $\mu(U_n) = 0$, tức là $x \in X \setminus supp\mu$. Vậy $X \setminus F \subset X \setminus supp\mu$ hay $\text{supp}\mu \subset F$.

Vậy định lý được chứng minh. □

Sau đây ta đưa ra khái niệm tính chính quy của độ đo Borel.

Định nghĩa 1.35. Cho μ là một độ đo Borel trên không gian tô pô X. Khi đó, độ đo μ được gọi là chính quy nếu với mọi tập Borel B đều có tính chất: Với mọi $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại các tập mở U và tập đóng F sao cho:

$$F \subset B \subset U \quad \text{và} \quad \mu(U \setminus F) < \epsilon.$$

Định lý sau khẳng định, có một số điều kiện thích hợp thì tính chính quy là tự động đạt được.

Định lý 1.36. *Cho μ là độ đo Borel hữu hạn trên không gian metric X. Khi đó, μ là độ đo chính quy.*

Chứng minh. Gọi $\mathcal{B}_0$ là họ các tập con Borel thỏa mãn tính chính quy của độ đo μ như trong Định nghĩa 1.35, tức là $A \in \mathcal{B}_0$ nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại tập đóng F và tập mở U sao cho $F \subset A \subset U$ và $\mu(U \setminus F) < \epsilon$.

• Ta có $X \in \mathcal{B}_0$ vì lúc này ta có thể chọn $F = U = X$ sẽ thỏa mãn điều kiện chính quy của μ.

• Giả sử $A \in \mathcal{B}_0$. Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý. Khi đó, tồn tại tập đóng F và tập mở U sao cho $F \subset A \subset U$ và $\mu(U \setminus F) < \epsilon$. Từ đây suy ra CU là tập đóng, CF là tập mở thỏa mãn $CU \subset CA \subset CF$ và

$$\mu(CF \setminus CU) = \mu(U \setminus F) < \epsilon.$$

Tức là CA cũng thỏa mãn tính chính quy của μ hay $CA \in \mathcal{B}_0$.

• Giả sử (A_n) là một dãy bất kỳ trong $\mathcal{B}_0$. Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý. Khi đó, mỗi A_n tồn tại tập đóng F_n và tập mở U_n sao cho $F_n \subset A_n \subset U_n$ và

$$\mu\left(U_n \setminus F_n\right) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}. \tag{1.27}$$

Đặt $U = \cup_{n=1}^{+\infty} U_n$ và $E_n = \cup_{j=1}^{n} F_j$. Ta có E_n là tập đóng và do μ là độ đo hữu hạn nên $\mu(E_n) < +\infty$ với mọi $n \geq 1$. Từ đây và bởi Định lý 1.17(b) suy ra

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j \setminus E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j\right) - \mu(E_n).$$

Do dãy (E_n) là tăng nên bởi Định lý 1.20(a) ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\lim_{n\to+\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right).$$

Vậy ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j \setminus E_n\right) = 0.$$

Từ đây suy ra tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j \setminus E_{n_0}\right) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.28}$$

Ta có $E_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset U$ và

$$\begin{aligned} U \setminus E_{n_0} &= \left(U \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j\right) \setminus \left[\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j\right) \setminus E_{n_0}\right] \\ &\subset \left[\bigcup_{j=1}^{+\infty} (U_j \setminus F_j)\right] \setminus \left[\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j\right) \setminus E_{n_0}\right]. \end{aligned}$$

Từ đây và bởi (1.27) và (1.28) ta suy ra

$$\mu(U \setminus E_{n_0}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(U_n \setminus F_n) + \mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j \setminus E_{n_0}\right) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Điều này chứng tỏ $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{B}_0$. Vậy $\mathcal{B}_0$ là một σ - đại số tập hợp trên X.

• Bây giờ ta sẽ chứng minh $\mathcal{B}_0$ bao hàm các tập mở: Lấy U là tập mở bất kỳ. Bởi X là không gian metric nên tồn tại dãy tăng các tập đóng (F_n) sao cho $\cup F_n = U$ (có thể chọn dãy là: với mỗi $n \geq 1$ đặt $F_n = \{x \in U : \mathrm{dist}(x, \partial U) \geq \frac{1}{n}\}$). Do μ là hữu hạn và bởi Định lý 1.20(a) ta có

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \mu\left(U \setminus \bigcup_{j=1}^{n} F_j\right) &= \mu(U) - \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} F_j\right) \\ &= \mu(U) - \mu\left(\lim_{n\to+\infty} \bigcup_{j=1}^{n} F_j\right) \\ &= \mu(U) - \mu(U) = 0. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ U thỏa mãn điều kiện chính quy của μ, tức là $U \in \mathcal{B}_0$.

Do $\mathcal{B}_0$ là σ - đại số bao hàm các tập mở nên nó chứa σ - đại số Borel. Vậy μ là độ đo Borel chính quy.

Vậy định lý được chứng minh. □

1.6. Độ đo trên $\mathbb{R}^n$

1.6.1. Độ đo trên đại số sinh bởi các gian trong $\mathbb{R}^n$

Mục này ta sẽ xây dựng độ đo trên đại số sinh bởi các gian trong không gian $\mathbb{R}^n$. Trước hết, ta nhắc lại họ $\mathcal{T}$ các khoảng trên $\mathbb{R}$ (xem Mục 1.1.2) có dạng như sau

$$\mathcal{T} := \{\emptyset, [a,b], (a,b), [a,b), (a,b], [a,+\infty), (-\infty,b], (a,+\infty), (-\infty,b), \mathbb{R}\}.$$

Mỗi khoảng $I \in \mathcal{T}$ ta đặt tương ứng với số không âm $|I|$, gọi là độ dài của I như sau:

$$|I| = \begin{cases} 0 & \text{nếu } I = \emptyset \\ +\infty & \text{nếu } I \text{ là khoảng không bị chặn} \\ b-a & \text{nếu } I \in \{(a,b), [a,b], [a,b), (a,b]\}. \end{cases}$$

Ta gọi $\mathcal{M}$ là họ tất cả các gian trong $\mathbb{R}^n$, tức là $\Delta \in \mathcal{M}$ có dạng

$$\Delta = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n,\ I_j \in \mathcal{I}, j = 1, 2, ..., n.$$

Mỗi gian $\Delta \in \mathcal{M}$ ta đặt tương ứng với số không âm $|\Delta|$, gọi là thể tích của Δ như sau:

$$|\Delta| = |I_1|.|I_2|...|I_n|.$$

Có thể thấy rằng, độ dài của các khoảng hay thể tích của các gian có tính chất là nếu một gian (hay khoảng) được phân hoạch thành hợp hữu hạn hay vô hạn đếm được các gian (hay khoảng) rời nhau đôi một thì thể tích (hay độ dài) của nó bằng tổng thể tích (hay độ dài) của các gian (hay khoảng) hợp thành nó, cụ thể: nếu $\Delta \in \mathcal{M}$ và $\Delta = \cup_{j \in I} \Delta_j$ với $\Delta_j \in \mathcal{M}$ và $\Delta_j \cap \Delta_k = \emptyset$, $\forall j \neq k$ thì ta có

$$|\Delta| = \sum_{j \in I} |\Delta_j|.$$

(ở đây, I là tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được).

Như trong Mục 1.1.2 (Định lý 1.6), gọi $\mathcal{E}$ là đại số tập hợp sinh bởi các gian trong $\mathbb{R}^n$. Cụ thể, $A \in \mathcal{E}$ nếu nó được biểu diễn bởi hợp hữu hạn các gian rời nhau $\Delta_j, j = 1, 2, ..., m$. Khi đó, trên $\mathcal{E}$ ta định nghĩa hàm tập $\mu : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ xác định bởi

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{m} |\Delta_j|, \tag{1.29}$$

với mọi $A \in \mathcal{E}$ thỏa mãn

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} \Delta_j,\ \Delta_j \cap \Delta_i = \emptyset \text{ với mọi } j \neq i.$$

Trước hết, ta chứng minh rằng giá trị $\mu(A)$ không phụ thuộc vào việc biểu diễn A bởi hợp hữu hạn các gian rời nhau.

Thật vậy: Giả sử ta có

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} \Delta_j, \quad \Delta_j \cap \Delta_i = \emptyset, \forall j \neq i$$

và

$$A = \bigcup_{j=1}^{k} \Delta'_j, \quad \Delta'_j \cap \Delta'_i = \emptyset, \forall j \neq i.$$

Ta có thể giả sử $m = k$, vì nếu $m > k$ thì ta có thể đặt $\Delta_j = \emptyset$ với các chỉ số $j = k+1, k+2, ..., k = m$. Khi đó ta có

$$\Delta_j = \Delta_j \cap A = \Delta_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} \Delta'_i \right) = \bigcup_{i=1}^{m} (\Delta_j \cap \Delta'_i) = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_{ji},$$

ở đây $\Delta_{ji} = \Delta_j \cap \Delta'_i$ với $i = 1, 2, ..., m$ là các gian rời nhau. Từ đây suy ra

$$|\Delta_j| = \sum_{i=1}^{m} |\Delta_{ji}|.$$

Theo định nghĩa của $\mu(A)$ ta có

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{m} |\Delta_j| = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} |\Delta_{ji}|. \tag{1.30}$$

Tương tự, ta cũng có các kết quả sau đây

$$\Delta'_i = \Delta'_i \cap A = \Delta'_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} \Delta_j \right) = \bigcup_{j=1}^{m} (\Delta'_i \cap \Delta_j) = \bigcup_{j=1}^{m} \Delta_{ij},$$

ở đây $\Delta_{ij} = \Delta'_i \cap \Delta_j$ với $j = 1, 2, ..., m$ là các gian rời nhau. Từ đây suy ra

$$|\Delta'_i| = \sum_{j=1}^{m} |\Delta_{ij}|.$$

Theo định nghĩa của $\mu(A)$ ta có

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{m} |\Delta'_i| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |\Delta_{ij}|. \tag{1.31}$$

Từ (1.30) và (1.31) ta suy ra định nghĩa $\mu(A)$ không phụ thuộc vào việc biểu diễn A bởi hợp hữu hạn các gian rời nhau.

Kết quả sau đây khẳng định rằng hàm tập μ xác định trên $\mathcal{E}$ bởi công thức (1.29) là một độ đo.

Định lý 1.37. *Hàm tập μ xác định bởi công thức (1.29) là một độ đo trên đại số tập hợp $\mathcal{E}$ sinh bởi các gian trong $\mathbb{R}^n$.*

Chứng minh. Để chứng minh μ là độ đo trên $\mathcal{E}$ ta chỉ còn phải chứng minh rằng μ là σ - cộng tính.

Giả sử

$$E_i \in \mathcal{E}, E_i \cap E_{i'} = \emptyset \text{ và } E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \mathcal{E}.$$

Do $E \in \mathcal{E}$ nên nó được biểu diễn bởi hợp của hữu hạn các gian rời nhau

$$E = \bigcup_{j=1}^{m} \Delta_j, \Delta_j \cap \Delta_{j'} = \emptyset, \forall j \neq j'.$$

Bởi công thức (1.29) ta có

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{m} |\Delta_j|. \tag{1.32}$$

Mặt khác, mỗi $E_i \in \mathcal{E}$ nên nó cũng được biểu diễn bởi hợp hữu hạn các gian rời nhau

$$E_i = \bigcup_{k=1}^{p_i} \Delta_{ik}, \Delta_{ik} \cap \Delta_{ik'} = \emptyset, \forall ik \neq ik'.$$

Từ đây suy ra

$$E = \bigcup_i E_i = \bigcup_i \bigcup_k \Delta_{ik}.$$

Ta có

$$\Delta_j = \Delta_j \cap E = \Delta_j \bigcap \left(\bigcup_i \bigcup_k \Delta_{ik} \right) = \bigcup_{i,k} (\Delta_j \cap \Delta_{ik}) = \bigcup_{i,k} \Delta_{jik},$$

ở đây $\Delta_{jik} = \Delta_j \cap \Delta_{ik}$ là các gian. Từ đây suy ra

$$|\Delta_j| = \sum_{i,k} |\Delta_{jik}|. \tag{1.33}$$

Từ (1.32) và (1.33) ta suy ra

$$\mu(E) = \sum_{j,i,k} |\Delta_{jik}|. \tag{1.34}$$

Ta lại có

$$E_i = E_i \cap E = \left(\bigcup_k \Delta_{ik}\right) \cap \left(\bigcup_j \Delta_j\right) = \bigcup_{k,j} (\Delta_{ik} \cap \Delta_j) = \bigcup_{k,j} \Delta_{jik}.$$

Từ đây suy ra

$$\mu(E_i) = \sum_{k,j} |\Delta_{jik}|.$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{k,j} |\Delta_{jik}|\right) = \sum_{i,k,j} |\Delta_{jik}|. \tag{1.35}$$

Từ (1.34) và (1.35) suy ra

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i).$$

Vậy μ là σ - cộng tính.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Chú ý 1.38. Gọi μ là độ đo xác định trên đại số tập hợp $\mathcal{E}$ sinh bởi các gian trong $\mathbb{R}^n$ (như trong Định lý 1.37). Áp dụng Định lý 1.28 cho độ đo μ ta nhận được độ đo μ^* xác định trên σ - đại số $\mathcal{F}(\mu)$. Ta có một số tên gọi sau đây:

- Độ đo μ^* được gọi là độ đo Lebesgue[3] trên $\mathbb{R}^n$.
- Mỗi tập thuộc $\mathcal{F}(\mu)$ được gọi là tập đo được Lebesgue trong $\mathbb{R}^n$.
- Với E là tập đo được Lebesgue trong $\mathbb{R}^n$ (tức là $E \in \mathcal{F}(\mu)$), kết hợp Định lý 1.27 và công thức (1.29) ta có công thức sau đây:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \inf\{\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(\Delta_i) : E \subset \cup_i \Delta_i\} \\ &= \inf\{\sum_{i=1}^{+\infty} |\Delta_i| : E \subset \cup_i \Delta_i\}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

- $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ là σ - đại số tập hợp sinh bởi đại số tập hợp $\mathcal{E}$. Ta có $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ trùng

[3]Khái niệm độ đo Lebesgue được đặt theo tên nhà toán học người Pháp: Henri Lebesgue (1875 - 1941)

với σ - đại số Borel trong $\mathcal{R}^n$ (xem Ví dụ 3). Bởi Định lý 1.28 ta có

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}(\mu),$$

nên suy ra mọi tập Borel đều là các tập đo được Lebesgue.

1.6.2. Tiêu chuẩn đo được Lebesgue

Gọi μ^* là độ đo xác định như trong Chú ý 1.38. Ta có kết quả sau đây về tiêu chuẩn đo được Lebesgue của một tập bất kỳ trong $\mathbb{R}^n$.

Định lý 1.39. *Tập $E \subset \mathbb{R}^n$ là đo được Lebesgue khi và chỉ khi một trong hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

(a) Với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại tập mở $G \supset E$ sao cho $\mu^*(G \setminus E) < \epsilon$.

(b) Với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại tập đóng $F \subset E$ sao cho $\mu^*(E \setminus F) < \epsilon$.

Chứng minh. (a) • "$\Rightarrow$:" Giả sử E là tập đo được Lebesgue. Ta xét hai trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: $\mu^*(E) < +\infty$. Bởi công thức (1.36) ta có với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại dãy các gian mở (Δ_i) trong $\mathbb{R}^n$ sao cho:

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} \Delta_i \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{+\infty} |\Delta_i| < \mu^*(E) + \epsilon.$$

Đặt $G = \cup_{i=1}^{+\infty} \Delta_i$. Khi đó, ta có G là tập mở và $E \subset G$. Bởi các tính chất của độ đo (Định lý 1.17) ta có

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(G) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |\Delta_i| < \mu^*(E) + \epsilon.$$

Vậy ta có $\mu^*(G) < \mu^*(E) + \epsilon$. Bởi Định lý 1.17(b) ta có

$$\mu^*(G \setminus E) = \mu^*(G) - \mu^*(E) < \epsilon.$$

Trường hợp 2: $\mu^*(E) = +\infty$. Ta xét dãy

$$\Delta_k = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n, I_1 = I_2 = ... = I_n = [-k, k], k = 1, 2, 3, ...$$

Ta có

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Delta_k, \ |\Delta_k| < +\infty.$$

Do đó ta có

$$E = E \cap \mathbb{R}^n = E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \Delta_k \right) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (E \cap \Delta_k) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k,$$

ở đây $E_k = E \cap \Delta_k$ là tập đo được Lebesgue và $\mu^*(E_k) < +\infty$. Với mỗi $k \geq 1$, áp dụng trường hợp 1, ta có tồn tại tập mở $G_k \supset E_k$ sao cho

$$\mu^*(G_k \setminus E_k) < \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Đặt

$$G = \bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k.$$

Ta có G là tập mở và ta có

$$G \setminus E = \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k \right) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(G_k \setminus (\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k) \right) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} (G_k \setminus E_k).$$

Từ đây suy ra

$$\mu^*(G \setminus E) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(G_k \setminus E_k) < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

• "$\Leftarrow$:" Với mỗi $k \geq 1$, ta đặt $\epsilon_k = \frac{1}{k}$. Bởi giả thiết, tồn tại tập mở $G_k \supset E$ sao cho

$$\mu^*(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}.$$

Đặt

$$G = \bigcap_{k=1}^{+\infty} G_k.$$

Khi đó, G là tập đo được Lebesgue và ta có

$$\mu^*(G \setminus E) \leq \mu^*(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}, \forall k \geq 1.$$

Từ đây suy ra $\mu^*(G \setminus E) = 0$. Và do đó tập $H = G \setminus E$ là tập đo được Lebesgue. Từ đây suy ra $E = G \setminus H$ cũng là tập đo được Lebesgue.

(b) • "$\Rightarrow$:" Giả sử E là tập đo được Lebesgue và $\epsilon > 0$ cho trước. Khi đó ta có tập $\mathbb{R}^n \setminus E$ cũng đo được Lebesgue. Bởi (a), tồn tại tập mở $G \supset (\mathbb{R}^n \setminus E)$ sao cho

$$\mu^*(G \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)) < \epsilon.$$

Đặt $F = \mathbb{R}^n \setminus G$. Khi đó ta có F là tập đóng, $F \subset E$ và $\mu^*(E \setminus F) < \epsilon$.

• "$\Leftarrow$:" Giả sử với mọi $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại tập đóng $F \subset E$ sao cho $\mu^*(E \setminus F) < \epsilon$. Đặt $G = \mathbb{R}^n \setminus F$. Ta có G là tập mở, $G \supset (\mathbb{R}^n \setminus E)$ và

$$\mu^*(G \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)) = \mu^*(E \setminus F) < \epsilon.$$

Bởi (a) ta suy ra tập $\mathbb{R}^n \setminus E$ là tập đo được Lebesgue. Và do đó, tập $E = \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)$ cũng đo được Lebesgue.

Vậy định lý được chứng minh. □

Kết quả sau đây là mối quan hệ giữa tập đo được Lebesgue với tập Borel trong $\mathbb{R}^n$.

Định lý 1.40. *Tập con $A \subset \mathbb{R}^n$ là đo được Lebesgue khi và chỉ khi A sai khác tập Borel bởi một tập có độ đo bằng không, tức là $A = B \cup V$ với B là tập Borel và V là tập có độ đo bằng* 0.

Chứng minh. • "$\Rightarrow$:" Giả sử A là tập đo được Lebesgue. Khi đó, với mỗi $k \geq 1$, bởi Định lý 1.39, tồn tại tập đóng $B_k \subset A$ sao cho

$$\mu^*(A \setminus B_k) < \frac{1}{k}.$$

Đặt $B = \cup_{k=1}^{+\infty} B_k$. Khi đó, B là tập Borel và tập $V = A \setminus B$ là đo được Lebesgue. Hơn nữa ta có

$$\mu^*(V) = \mu^*(A \setminus B) \leq \mu^*(A \setminus B_k) < \frac{1}{k}, \forall k \geq 1.$$

Từ đây suy ra $\mu^*(V) = 0$. Vậy $A = B \cup V$ thỏa mãn định lý.

• "$\Leftarrow$:" Giả sử $A = B \cup V$ với B là tập Borel và V là tập có độ đo bằng 0. Khi đó ta có V là tập đo được Lebesgue và do đó A cũng đo được Lebesgue. □

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài 1.1. Cho tập hợp $X = \{a, b, c\}$. Hãy liệt kê tất cả các đại số tập hợp trên X.

Bài 1.2. Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và gọi $\mathcal{E}_Y$ là một đại số tập hợp trên Y. Chứng minh rằng họ $\mathcal{E}_X = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}_Y\}$ là đại số tập hợp trên X. Hơn nữa nếu $\mathcal{E}_Y$ là một σ - đại số tập hợp thì $\mathcal{E}_X$ cũng là một σ - đại số tập hợp. Hãy lấy ví dụ chứng tỏ rằng, ảnh của một đại số tập hợp qua một ánh xạ không còn là đại số tập hợp.

Bài 1.3. Giả sử $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X thỏa mãn nếu $(A_i) \subset \mathcal{E}$ và $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_i \subset ...$ thì $\cup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{E}$. Chứng minh rằng $\mathcal{E}$ là một σ - đại số tập hợp trên X.

Bài 1.4. Chứng minh rằng họ tất cả các tập con vừa đóng, vừa mở trong một không gian tô pô là một đại số tập hợp.

Bài 1.5. Chứng minh rằng với mọi dãy tập hợp (A_n) ta luôn có

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n \subset \limsup_{n\to+\infty} A_n.$$

Cho một ví dụ thỏa mãn

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n \neq \limsup_{n\to+\infty} A_n.$$

Bài 1.6. Chứng minh rằng giới hạn của một dãy tập hợp (A_n) tồn tại khi và chỉ khi tồn tại giới hạn của dãy các hàm đặc trưng tương ứng (χ_{A_n}) của chúng.

Bài 1.7. Cho $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X $(X \neq \emptyset)$ và $x_0 \in X$. Chứng minh rằng hàm $\mu : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ xác định bởi

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x_0 \in A \\ 0 & \text{nếu } x_0 \notin A \end{cases}$$

là một độ đo trên X.

Bài 1.8. Chứng minh rằng nếu A, B là hai tập đo được theo độ μ thì

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Bài 1.9. Giả sử μ là độ đo đủ trên X và $E \subset X$ là tập không đo được theo μ. Chứng minh rằng với mọi tập con $A \subset X, \mu(A) = 0$ thì $E \cap CA$ là tập không đo được.

Bài 1.10. Cho tập hợp $X \neq \emptyset$. Với mỗi tập con $A \subset X$ ta đặt

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{nếu } A = \emptyset. \end{cases}$$

Chứng minh rằng μ^* là một độ đo ngoài. Hãy xác định σ - đại số tập hợp $\mathcal{F}$ gồm các tập μ^* - đo được.

Bài 1.11. Cho tập hợp rời rạc có vô hạn đếm được các phần tử $A = \{a_1, a_2, ...\} \subset \mathbb{R}$. Tính độ đo Lebesgue của A.

Bài 1.12. Tính độ đo Lebesgue của tập Cantor.

Chương 2
HÀM ĐO ĐƯỢC

Nội dung của chương này trình bày về lý thuyết hàm đo được trên một không gian đo được. Chúng ta sẽ tìm hiểu một số khái niệm hội tụ quan trọng của dãy các hàm đo được và xem xét trường hợp đặc biệt về hàm đo được với giá trị vô hướng (giá trị trong không gian $\mathbb{R}$).

Cho X là một tập hợp. Ta gọi bộ $(X, \mathcal{F}, \mu)$ là không gian đo được, trong đó $\mathcal{F}$ là một σ - đại số tập hợp trên X và μ là một độ đo trên $\mathcal{F}$. Trong chương này ta luôn giả thiết μ là độ đo dương, đủ và σ - hữu hạn.

2.1. Định nghĩa hàm đo được

Định nghĩa 2.1. Cho $(X, \mathcal{F}, \mu)$ là một không gian đo được, Y là một không gian tô pô Hausdorff. Hàm $f : X \to Y$ được gọi là đo được (theo độ đo μ) nếu thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(a) Tập $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$ với mọi tập mở $G \subset Y$;

(b) Hàm f có ảnh hầu khả ly, tức là tồn tại tập đếm được $H \subset Y$ và tập $N \subset X$ có độ đo bằng 0 sao cho $f(X \setminus N) \subset \overline{H}$.

• Trường hợp $X \subset \mathbb{R}^n$ là tập đo được Lebesgue và μ là độ đo Lebesgue trên X thì hàm f lúc này được gọi là hàm đo được Lebesgue.

• Ta nói rằng một tính chất T thỏa mãn hầu khắp nơi trên X nếu tập hợp các phần tử thuộc X và không thỏa mãn tính chất T có độ đo bằng không.

Ví dụ 9. Cho 2 hàm $f, g : X \to Y$. Ta nói $f = g$ hầu khắp nơi trên X nếu

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}\right) = 0.$$

Nhận xét 2.2. (a) Nếu f là hàm đo được trên X và $g = f$ hầu khắp nơi trên X thì g cũng là hàm đo được trên X.

(b) Cho $f : X \to Y$ là hàm đo được. Khi đó $f^{-1}(F)$ là tập đo được, tức là $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}$, với mọi tập đóng $F \subset Y$.

Chứng minh. (a) Đặt $N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Ta có $\mu(N) = 0$.

• Giả sử G là tập mở bất kỳ trong Y. Ta có

$$\begin{aligned} g^{-1}(G) &= \left[g^{-1}(G) \cap (X \setminus N)\right] \bigcup \left[g^{-1}(G) \cap N\right] \\ &= \left[f^{-1}(G) \cap (X \setminus N)\right] \bigcup \left[g^{-1}(G) \cap N\right]. \end{aligned}$$

Ta có $f^{-1}(G), X \setminus N$ là các tập đo được. Do μ là độ đo đủ nên suy ra tập $g^{-1}(G) \cap N$ cũng đo được (Định nghĩa 1.16). Vậy $g^{-1}(G)$ được biểu diễn dưới dạng hợp và giao của các tập đo được. Từ đó suy ra $g^{-1}(G)$ cũng là tập đo được.

• Do f là hàm đo được nên tồn tại tập đếm được $H \subset Y$ và tập $N_1 \subset X$ có độ đo bằng 0 sao cho $f(X \setminus N_1) \subset \overline{H}$. Đặt $N_0 = N \cup N_1$. Ta có $\mu(N_0) = 0$ và

$$g(X \setminus N_0) = f(X \setminus N_0) \subset f(X \setminus N_1) \subset \overline{H}.$$

Vậy hàm g thỏa mãn Định nghĩa 2.1, nói cách khác g là hàm đo được.

(b) Ta có

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

Do $Y \setminus F$ là tập mở nên $f^{-1}(Y \setminus F)$ là tập đo được. Hiển nhiên, X là đo được. Vậy $f^{-1}(F)$ là hiệu của hai tập đo được nên nó cũng đo được.

Vậy nhận xét được chứng minh. □

Sau đây ta đưa ra một số ví dụ về hàm đo được.

Ví dụ 10. Cho Δ là một gian đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và $f : \Delta \to Y$ là một hàm liên tục. Chứng minh rằng f là hàm đo được.

Chứng minh. • Nếu G là một tập mở trong Y thì bởi f liên tục nên $f^{-1}(G)$ cũng là tập mở. Vậy $f^{-1}(G)$ là tập đo được.

• Do Δ là gian đóng và bị chặn nên nó là tập compact. Bởi f liên tục nên $f(\Delta)$ cũng là tập compact và do đó nó cũng là tập khả ly.

Vậy f là hàm đo được trên Δ. □

Ví dụ 11. Nếu (Y, ρ) là không gian metric và $f : X \to (Y, \rho)$ là hàm đo được thì hàm $x \mapsto \rho(f(x), y)$ là hàm đo được trên X, với mọi $y \in Y$.

Chứng minh. Đặt $g : X \to \mathbb{R}$ xác định bởi $g(x) = \rho(f(x), y)$ với mọi $x \in X$. Ta sẽ chứng minh g là hàm đo được trên X.

• Với mọi $-\infty \le a \le +\infty$ ta đặt

$$E_a^- = \{x \in X : g(x) < a\} = \{x \in X : \rho(f(x), y) < a\}$$
$$= \begin{cases} \emptyset & \text{nếu } a \le 0 \\ f^{-1}(B(y,a)) & \text{nếu } a > 0. \end{cases}$$

$$E_a^+ = \{x \in X : g(x) > a\} = \{x \in X : \rho(f(x), y) > a\}$$
$$= \begin{cases} X & \text{nếu } a \le 0 \\ X \setminus f^{-1}(\overline{B}(y,a)) & \text{nếu } a > 0. \end{cases}$$

Từ các biểu diễn như trên ta suy ra E_a^- và E_a^+ là các tập đo được.

Giả sử $G = (a, b)$ với mọi $-\infty \le a < b \le +\infty$. Ta có

$$g^{-1}(G) = g^{-1}((a,b)) = E_b^- \cap E_a^+.$$

Từ đó suy ra $g^{-1}(G)$ là tập đo được trong X.

• Do $\mathbb{R}$ là không gian khả ly nên $f(X) \subset \mathbb{R}$ cũng khả ly.

Vậy g là hàm đo được trên X. □

Ví dụ 12. Ký hiệu $L^\infty([0,1])$ là không gian Banach các hàm thực bị chặn trên đoạn $[0,1]$. Gọi K là tập Cantor của đoạn $[0,1]$. Ta xét hàm $f : [0,1] \to L^\infty([0,1])$ xác định bởi

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \in [0,1] \setminus K \\ \chi_t & \text{nếu } t \in K, \end{cases}$$

ở đây, χ_t là hàm đặc trưng của tập $\{t\}$. Chứng minh rằng f là hàm đo được trên $[0,1]$.

Chứng minh. Ta xét hàm $g : [0,1] \to L^\infty([0,1])$ xác định bởi $g(t) = 0$ với mọi $t \in [0,1]$. Khi đó, g là hàm liên tục trên $[0,1]$. Bởi Ví dụ 10 ta có g là hàm đo được trên $[0,1]$.

Mặt khác, ta có $f = g$ trên $[0,1] \setminus K$. Do tập Cantor có độ đo Lebesgue bằng 0 nên $f = g$ hầu khắp nơi trên $[0,1]$. Vậy bởi Nhận xét 2.2 ta có f là hàm đo được trên $[0,1]$. □

2.2. Hàm đơn giản

Định nghĩa 2.3. Cho $(X, \mathcal{F}, \mu)$ là một không gian đo được, Y là không gian tô pô Hausdorff. Hàm $f : X \to Y$ được gọi là hàm đơn giản nếu nó chỉ nhận một số hữu hạn giá trị.

Ví dụ 13. Cho $A \subset X$. Ta xét hàm đặc trưng của tập A như sau

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A \\ 0 & \text{nếu } x \notin A. \end{cases}$$

Khi đó, χ_A là một hàm đơn giản trên X.

Mệnh đề sau đây cho ta một tiêu chuẩn để hàm đơn giản là đo được.

Mệnh đề 2.4. *Giả sử hàm đơn giản $f : X \to Y$ nhận các giá trị $y_1, y_2, ..., y_m \in Y$. Khi đó, hàm f là đo được nếu và chỉ nếu các tập $f^{-1}(y_i)$ là đo được với mọi $i = 1, 2, ..., m$.*

Chứng minh. • "⇒:" Giả sử f là hàm đơn giản đo được. Khi đó, do $Y \setminus \{y_i\}$ là tập mở (∀ i=1,2,...,m) nên suy ra các tập $f^{-1}(Y \setminus \{y_i\})$ là đo được. Ta có

$$f^{-1}(\{y_i\}) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus \{y_i\}) \quad (\forall i = 1, 2, ..., m).$$

Vậy $f^{-1}(\{y_i\})$ được biểu diễn bởi hiệu hai tập đo được nên suy ra $f^{-1}(\{y_i\})$ cũng là tập đo được.

• "⇐:" Giả sử các tập $f^{-1}(\{y_i\})$ là đo được với mọi $i = 1, 2, ..., m$. Do tập giá trị của f là hữu hạn nên hiển nhiên nó là khả ly (tức là Định nghĩa 2.1(b) được thỏa mãn).

Ta kiểm tra điều kiện (a) của Định nghĩa 2.1. Giả sử $G \subset Y$ là tập mở. Ta có

$$f^{-1}(G) = \begin{cases} \emptyset \text{ nếu } G \cap \{y_1, y_2, ..., y_m\} = \emptyset \\ \cup\{f^{-1}(\{y_i\}) : y_i \in G\}. \end{cases}$$

Từ biểu diễn trên ta suy ra $f^{-1}(G)$ là tập đo được, tức là Định nghĩa 2.1(a) được thỏa mãn. Vậy f là hàm đo được. □

Ta có hệ quả sau đây để nhận biết hàm đặc trưng của một tập hợp là đo được.

Hệ quả 2.5. *Hàm đặc trưng χ_A của tập A là đo được nếu và chỉ nếu A là tập con đo được trong X.*

Chứng minh. Suy trực tiếp từ Mệnh đề 2.4. □

2.3. Dãy hàm hội tụ hầu khắp nơi và hội tụ theo độ đo

2.3.1. Dãy hàm hội tụ hầu khắp nơi

Định nghĩa 2.6. Dãy hàm (f_n) đo được trên X với giá trị trong không gian metric Y gọi là hội tụ hầu khắp nơi tới hàm f (ký hiệu là $f_n \overset{\text{hkn}}{\to} f$) nếu tồn tại tập con $A \subset X$ với $\mu(A) = 0$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (\forall x \in X \setminus A).$$

Ta có tiêu chuẩn sau đây về tính đo được của hàm nhận giá trị trong không gian metric.

Bổ đề 2.7. *Cho Y là không gian metric. Hàm $f : X \to Y$ là đo được khi và chỉ khi f thỏa mãn tồn tại tập $N \subset X$ với $\mu(N) = 0$ và một tập đếm được $H \subset Y$ sao cho $f(X \setminus N) \subset \overline{H}$ và một trong hai điều kiện sau:*

i) Với mọi hình cầu mở $B \subset Y$ thì tập $f^{-1}(B)$ là đo được;

ii) Với mọi hình cầu đóng $\overline{B} \subset Y$ thì tập $f^{-1}(\overline{B})$ là đo được.

Chứng minh. • **Điều kiện cần:** Giả sử f là hàm đo được. Khi đó theo Định nghĩa 2.1 thì các yêu cầu trong bổ đề được thỏa mãn.

• **Điều kiện đủ:** Giả sử các điều kiện trong bổ đề được thỏa mãn. Khi đó, để chứng minh f là hàm đo được ta chỉ cần chứng minh tạo ảnh của mọi tập mở trong Y đều là tập đo được. Ta lần lượt xét cho các trường hợp i) và ii) sau đây.

Trường hợp điều kiện i) thỏa mãn: Giả sử $G \subset Y$ là một tập mở. Theo giả thiết tồn tại tập con $N \subset X$ với $\mu(N) = 0$ và một tập đếm được $H = \{y_1, y_2, ...\} \subset Y$ sao cho

$$f(X \setminus N) \subset \overline{H}.$$

Với $x \in f^{-1}(G) \cap (X \setminus N)$. Do $f(x) \in G$ nên tồn tại $r_x > 0$ sao cho hình cầu $B(f(x), 3r_x) \subset G$. Do $f(x) \in \overline{H}$ nên tồn tại $y_x \in H$ sao cho $y_x \in B(f(x), r_x)$. Ta có

$$f(x) \in B(y_x, r_x) \;\text{ và }\; B(y_x, r_x) \subset B(y_x, 2r_x) \subset G.$$

Ta có thể kiểm tra được rằng

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(G) \cap (X \setminus N) &= \bigcup_{x \in f^{-1}(G) \cap (X \setminus N)} f^{-1}(B(y_x, r_x)) \cap (X \setminus N) \\
&= \bigcup_{x \in f^{-1}(G) \cap (X \setminus N)} f^{-1}(B(y_x, 2r_x)) \cap (X \setminus N).
\end{aligned}
$$

Với mỗi $n \geq 1$ ta đặt $r_n = \sup\{r_x : y_x = y_n\}$. Khi đó, ta cũng kiểm tra được đẳng thức sau

$$
f^{-1}(G) \cap (X \setminus N) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(B(y_n, r_n)) \cap (X \setminus N).
$$

Vậy tập $f^{-1}(G) \cap (X \setminus N)$ được biểu diễn bởi hợp đếm được của các tập đo được nên suy ra nó cũng là tập đo được.

Mặt khác, do μ là độ đo đủ nên suy ra tập $f^{-1}(G) \cap N$ cũng đo được.

Ta có

$$
f^{-1}(G) = \left[f^{-1}(G) \cap (X \setminus N)\right] \cup \left[f^{-1}(G) \cap N\right].
$$

Từ đây suy ra $f^{-1}(G)$ là tập đo được.

Trường hợp điều kiện ii) thỏa mãn: Lúc này ta sẽ chứng minh điều kiện i) thỏa mãn. Thật vậy, giả sử B là hình cầu mở trong Y. Gọi $(\overline{B}_n)$ là dãy giảm các hình cầu đóng thỏa mãn

$$
\overline{B}_n \supset \overline{B}_{n+1}, \ \forall n \geq 1 \ \text{ và } \ \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{B}_n = B.
$$

Khi đó, ta có thể kiểm tra rằng

$$
f^{-1}(B) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(\overline{B}_n).
$$

Từ đây suy ra $f^{-1}(B)$ là tập đo được. Vậy theo trường hợp trên suy ra hàm f là đo được.

Vậy bổ đề được chứng minh. $\square$

Từ bổ đề trên ta sẽ chứng minh kết quả sau đây về mối liên hệ giữa hội tụ hầu khắp nơi và tính đo được của hàm với giá trị trong không gian metric.

Định lý 2.8. *Cho (f_n) là dãy hàm đo được trên X với giá trị trong không gian metric (Y, d). Khi đó nếu $f_n \overset{hkn}{\to} f$ thì f cũng là hàm đo được trên X.*

Chứng minh. Để chứng minh f là hàm đo được ta chứng minh nó thỏa mãn Định nghĩa 2.1(a) và Bổ đề 2.7.

• Do dãy (f_n) hội tụ hầu khắp nơi tới f nên tồn tại tập con $A \subset X$ với $\mu(A) = 0$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (\forall x \in X \setminus A). \tag{2.1}$$

Do f_n là hàm đo được trên X nên tồn tại tập $N_n \subset X$ với $\mu(N_n) = 0$ và một tập đếm được $H_n \subset Y$ sao cho

$$f_n(X \setminus N_n) \subset \overline{H}_n. \tag{2.2}$$

Đặt

$$N = A \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) \ \text{ và } \ H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n.$$

Ta có $\mu(N) = 0$ và H là tập con đếm được trong Y. Ta sẽ chứng minh

$$f(X \setminus N) \subset \overline{H}.$$

Thật vậy, lấy $x_0 \in X \setminus N$ và $\epsilon > 0$ cho trước. Do x_0 thỏa mãn (2.1) nên tồn tại $n_0 \geq 1$ sao cho

$$d(f_n(x_0), f(x_0)) < \epsilon \quad (n \geq n_0). \tag{2.3}$$

Do $(X \setminus N) \subset (X \setminus N_n)$ nên bởi (2.2) ta suy ra $f_n(x_0) \in \overline{H}_n$ với mọi $n \geq 1$. Vậy với mỗi $n \geq 1$, tồn tại $y_n \in H_n$ sao cho

$$d(f_n(x_0), y_n) < \frac{\epsilon}{2} \quad (\forall n \geq 1). \tag{2.4}$$

Ta có $(y_n) \subset H$ và từ (2.3) và (2.4) ta suy ra

$$d(y_n, f(x_0)) \leq d(y_n, f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0)) \leq \epsilon \quad (\forall n \geq n_0).$$

Điều này chứng tỏ $f(x_0) \in \overline{H}$. Vậy Định nghĩa 2.1(a) được thỏa mãn.

• Gọi $\overline{B}(y, r)$ là hình cầu đóng trong Y. Ta sẽ chứng minh $f^{-1}(\overline{B}(y, r))$ là tập đo được. Ta có thể kiểm tra được đẳng thức sau

$$f^{-1}(\overline{B}(y,r)) \cap (X \setminus N) = \left[\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \left(f_n^{-1}(\overline{B}(y, r + \frac{1}{m}))\right)\right] \cap (X \setminus N). \tag{2.5}$$

Thật vậy: lấy

$$x_0 \in f^{-1}(\overline{B}(y, r)) \cap (X \setminus N).$$

Khi đó ta có $f(x_0) \in \overline{B}(y,r)$ và x_0 thỏa mãn (2.1). Ta có

$$d(f_n(x_0), y) \leq d(f_n(x_0), f(x_0)) + d(f(x_0), y).$$

Từ đây suy ra với mọi $m \geq 1$, tồn tại n_m (có thể chọn $n_m \geq m$) sao cho

$$d(f_n(x_0), y) \leq r + \frac{1}{m} \quad (\forall n \geq n_m).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} x_0 &\in \left[\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=n_m}^{\infty} \left(f_n^{-1}(\overline{B}(y, r+\frac{1}{m}))\right)\right] \cap (X \setminus N) \\ &\subset \left[\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \left(f_n^{-1}(\overline{B}(y, r+\frac{1}{m}))\right)\right] \cap (X \setminus N). \end{aligned}$$

Ngược lại, lấy

$$x_0 \in \left[\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \left(f_n^{-1}(\overline{B}(y, r+\frac{1}{m}))\right)\right] \cap (X \setminus N).$$

Khi đó, với mọi $m \geq 1$, tồn tại $n \geq m$ sao cho

$$x \in f_n^{-1}(\overline{B}(y, r+\frac{1}{m})).$$

Suy ra

$$f_n(x_0) \in \overline{B}(y, r+\frac{1}{m}) \quad (\forall m \geq 1, \forall n \geq m).$$

Từ đây, cho $m \to \infty$ và lúc này ta cũng có $n \to \infty$. Vậy suy ra

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \in \overline{B}(y,r).$$

Do các hàm f_n là đo được nên từ (2.5) ta suy ra tập $f^{-1}(\overline{B}(y,r)) \cap (X \setminus N)$ là đo được.

Do μ là độ đo đủ nên suy ra tập $f^{-1}(\overline{B}(y,r)) \cap N$ cũng đo được.

Ta có

$$f^{-1}(\overline{B}(y,r)) = \left[f^{-1}(\overline{B}(y,r)) \bigcap (X \setminus N)\right] \bigcup \left[f^{-1}(\overline{B}(y,r)) \bigcap N\right].$$

Biểu diễn trên chứng tỏ $f^{-1}(\overline{B}(y,r))$ là tập đo được.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Kết quả sau đây là mối liên hệ giữa hội tụ hầu khắp nơi và hội tụ đều của dãy hàm đo được.

Định lý 2.9 (Định lý Egorop). *Giả sử* (f_n) *là dãy hàm đo được trên* X *với giá trị trong không gian metric* (Y, d). *Nếu* $f_n \overset{hkn}{\to} f$ *thì với mọi tập đo được* $A \subset X$ *với* $\mu(A) < +\infty$ *và với mọi* $\epsilon > 0$ *đều tồn tại tập đo được* $B \subset A$ *với* $\mu(A \setminus B) < \epsilon$ *để dãy* (f_n) *hội tụ đều đến* f *trên* B.

Chứng minh. Bởi Định lý 2.8 thì hàm f là đo được trên X. Đặt

$$M = \{x \in A : f_n(x) \text{ không hội tụ tới } f(x)\}.$$

Với mỗi $\delta > 0$ ta có

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} \{x \in A : d(f_{n+k}(x), f(x)) \geq \delta\} \subset M.$$

Suy ra

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} \{x \in A : d(f_{n+k}(x), f(x)) \geq \delta\}\right) \leq \mu(M) = 0.$$

Nếu đặt

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{x \in A : d(f_{n+k}(x), f(x)) \geq \delta\},$$

thì ta có

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

Hơn nữa, (A_n) là dãy giảm các tập đo được chứa trong A. Bởi giả thiết ta có

$$\mu(A_1) \leq \mu(A) < +\infty.$$

Bởi tính chất liên tục dưới dãy đơn điệu các tập hợp (Định lý 1.20) ta có

$$\mu(A_n) \longrightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Khi đó, với mỗi $m = 1, 2, 3, ...$ tồn tại $n_m \geq 1$ (có thể chọn $n_m \geq m$) sao cho

$$\mu(A_{n_m}) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{x \in A : d(f_{n_m+k}(x), f(x)) \geq \frac{1}{m}\}\right) < \frac{\epsilon}{2^m}.$$

Bởi tính chất của độ đo (Định lý 1.17(c)) ta có

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty}\{x\in A: d(f_{n_m+k}(x),f(x))\geq \frac{1}{m}\}\right)\leq \sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_{n_m})$$
$$<\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^m}=\epsilon.$$

Đặt

$$B=A\setminus\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty}\{x\in A: d(f_{n_m+k}(x),f(x))\geq \frac{1}{m}\}\right).$$

Suy ra

$$A\setminus B=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty}\{x\in A: d(f_{n_m+k}(x),f(x))\geq \frac{1}{m}\}.$$

Suy ra $\mu(A\setminus B)<\epsilon$. Hơn nữa, với mọi $x\in B$ thì với mọi $m\geq 1$ và với mọi $k\geq 0$ đều thỏa mãn

$$d(f_{n_m+k}(x),f(x))<\frac{1}{m}.$$

Cho $m\to\infty$ (khi đó $n_m\to\infty$) ta có

$$d(f_{n_m+k}(x),f(x))\to 0 \quad (\forall x\in B),$$

tức là dãy (f_n) hội tụ đều đến f trên B.

Vậy định lý được chứng minh. □

2.3.2. Dãy hàm hội tụ theo độ đo

Định nghĩa 2.10. Cho $(X,\mathcal{F},\mu)$ là một không gian đo được. Giả sử dãy hàm (f_n) và hàm f là các hàm đo được trên $A\in\mathcal{F}$ với giá trị trong không gian metric (Y,d). Ta nói rằng dãy hàm (f_n) hội tụ theo độ μ tới hàm f (ký hiệu $f_n\xrightarrow{\mu} f$) nếu với mọi $\epsilon>0$ ta có

$$\lim_{n\to\infty}\mu\{x\in A: d(f_n(x),f(x))\geq\epsilon\}=0.$$

Các kết quả sau đây là mối liên hệ giữa hội tụ hầu khắp nơi và hội tụ theo độ đo của dãy hàm với giá trị trong không gian metric.

Định lý 2.11. *Cho $(X,\mathcal{F},\mu)$ là một không gian đo được, $A\in\mathcal{F}$ và (f_n) là dãy các hàm đo được trên A với giá trị trong không gian metric (Y,d). Khi đó, nếu $f_n\xrightarrow{hkn} f$ trên A và $\mu(A)<+\infty$ thì f đo được và $f_n\xrightarrow{\mu} f$.*

Chứng minh. Bởi Định lý 2.8 suy ra f là hàm đo được trên A. Ta còn phải chứng minh $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A.

Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý. Đặt

$$M = \{x \in A : f_n(x) \text{ không hội tụ tới } f(x)\}.$$

Ta có

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} \{x \in A : d(f_{n+k}(x), f(x)) \geq \epsilon\} \subset M.$$

Suy ra

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} \{x \in A : d(f_{n+k}(x), f(x)) \geq \epsilon\}\right) \leq \mu(M) = 0.$$

Đặt

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{x \in A : d(f_{n+k}(x), f(x)) \geq \epsilon\}.$$

Ta có

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

Hơn nữa, (A_n) là dãy giảm các tập đo được trong A và bởi giả thiết ta có

$$\mu(A_1) \leq \mu(A) < +\infty.$$

Từ đây, bởi tính chất của độ đo (Định lý 1.20(b)) ta có

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

Mặt khác ta có

$$\{x \in A : d(f_n(x), f(x)) \geq \epsilon\} \subset A_n.$$

Suy ra

$$\mu(\{x \in A : d(f_n(x), f(x)) \geq \epsilon\}) \leq \mu(A_n).$$

Cho $n \to 0$ ta nhận được

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in A : d(f_n(x), f(x)) \geq \epsilon\}) = 0,$$

tức là $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Định lý 2.12. *Cho $(X, \mathcal{F}, \mu)$ là một không gian đo được, $A \in \mathcal{F}$ và (f_n) là dãy các hàm đo được trên A với giá trị trong không gian metric (Y, d). Khi đó, nếu $f_n \overset{\mu}{\to} f$ thì tồn tại dãy con (f_{n_k}) sao cho $f_{n_k} \overset{hkn}{\to} f$ trên A.*

Chứng minh. Do $f_n \overset{\mu}{\to} f$ trên A nên ta có:

- Với $\epsilon = \frac{1}{2}$ tồn tại $n_1 \geq 1$ sao cho

$$\mu\{x \in A : d(f_n(x), f(x)) \geq \frac{1}{2}\} < \frac{1}{2} \quad (\forall n \geq n_1).$$

- Với $\epsilon = \frac{1}{2^2}$ tồn tại $n_2 \geq 1$ (có thể chọn $n_2 > n_1$) sao cho

$$\mu\{x \in A : d(f_n(x), f(x)) \geq \frac{1}{2^2}\} < \frac{1}{2^2} \quad (\forall n \geq n_2).$$

Tiếp tục quá trình này ta sẽ tìm dãy số tự nhiên: $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ thỏa mãn với mọi $k = 1, 2, 3, ...$ ta có

$$\mu\{x \in A : d(f_n(x), f(x)) \geq \frac{1}{2^k}\} < \frac{1}{2^k} \quad (\forall n \geq n_k).$$

Đặt

$$M_j = \bigcup_{k=j}^{\infty}\{x \in A : d(f_{n_k}(x), f(x)) \geq \frac{1}{2_k}\} \text{ và } M = \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j.$$

Ta sẽ chứng minh M là tập đo được với $\mu(M) = 0$ và $f_{n_k}(x) \to f(x)$ với mọi $x \in A \setminus M$.

Thật vậy: Ta có $M \subset M_j$ với mọi j. Do đó

$$\mu(M) \leq \mu(M_j) < \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} \to 0 \quad \text{khi} \quad j \to \infty.$$

Vậy $\mu(M) = 0$.

Với mọi $x \in A \setminus M$ suy ra $x \notin M$. Do đó tồn tại j_0 sao cho $x \notin M_{j_0}$. Từ đây suy ra

$$d(f_{n_k}(x), f(x)) < \frac{1}{2_k} \quad (\forall k \geq j_0).$$

Điều này chứng tỏ $f_{n_k}(x) \to f(x)$ khi $k \to \infty$.

Vậy $f_{n_k} \overset{hkn}{\to} f$ trên A.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

2.4. Cấu trúc hàm đo được

2.4.1. Cấu trúc hàm đo được với giá trị trong một không gian metric bất kỳ

Bổ đề 2.13. *Nếu $f : X \to (Y, d)$ là hàm đo được với miền giá trị đếm được thì tồn tại một dãy các hàm đơn giản đo được hội tụ đến f trên X.*

Chứng minh. Giả sử tập giá trị của của f là $f(X) = \{y_1, y_2, ...\}$. Khi đó, bởi Nhận xét 2.2(b) ta có $T_n = f^{-1}\{y_n\}$ là các tập đo được với mọi $n \geq 1$. Ta xét dãy các hàm đơn giản (f_n) được xác định như sau: Với $a \in Y$ cố định và $n \geq 1$ ta đặt:

$$f_n(x) = \begin{cases} y_j & \text{với } x \in T_j, 1 \leq j \leq n \\ a & \text{với } x \in X \setminus \cup_{j=1}^{n} T_j. \end{cases}$$

Khi đó, (f_n) là dãy các hàm đơn giản và đo được trên X. Hơn nữa, $f_n(x) \to f(x)$ khi $n \to \infty$ với mọi $x \in X$. Thật vậy, lấy $x \in X$. Khi đó tồn tại n_0 sao cho $x \in T_{n_0}$. Khi đó

$$f_n(x) = f(x) = y_{n_0}$$

với mọi $n \geq n_0$, tức là

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Do x là bất kỳ trong X nên dãy (f_n) hội tụ đến f trên X.

Vậy bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.14. *Cho $f : X \to (Y, d)$ là hàm đo được bất kỳ. Khi đó, tồn tại tập N có độ đo bằng 0 và một dãy (f_n) các hàm đo được trên X với miền giá trị đếm được hội tụ tới f trên $X \setminus N$.*

Chứng minh. Do f là hàm đo được nên tồn tại tập $N \subset X$ với độ đo bằng 0 và một tập đếm được $H = \{x_1, x_2, ...\}$ sao cho

$$f(X \setminus N) \subset \overline{H}.$$

Ký hiệu

$$X_0 = X \setminus N,\ X_{n,p} = T_0 \bigcap f^{-1}\left(\overline{S}(x_p, \frac{1}{n})\right).$$

Khi đó, với mỗi $n \geq 1$ ta có

$$X_0 = \bigcup_{p=1}^{\infty} X_{n,p}.$$

Thật vậy: nếu $x \in X_0$ thì $f(x) \in \overline{H}$, do đó tồn tại $x_p \in H$ sao cho

$$d(f(x), x_p) < \frac{1}{n},$$

tức là

$$f(x) \in X_{n,p} \subset \bigcup_{p=1}^{\infty} X_{n,p}.$$

Vậy ta có

$$X_0 \subset \bigcup_{p=1}^{\infty} X_{n,p}.$$

Bao hàm thức ngược lại là hiển nhiên.

Với mỗi $n \geq 1$ cố định, ta đặt

$$A_{n,1} = X_{n,1},\ ..., A_{n,p} = X_{n,p} \setminus \bigcup_{i<p} X_{n,i},\ (p = 1, 2, ...).$$

Khi đó ta nhận được dãy $(A_{n,p})$ các tập đo được rời nhau từng đôi một và thỏa mãn

$$X_0 = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_{n,p}.$$

Xét dãy hàm (f_n) xác định bởi

$$f_n(x) = \begin{cases} x_p & \text{nếu } x \in A_{n,p}, p = 1, 2, ... \\ y_0 & \text{nếu } x \in X \setminus X_0. \end{cases}$$

(ở đây y_0 là một phần tử cố định nào đó thuộc Y). Ta có thể kiểm tra rằng dãy f_n hội tụ đến f trên X_0, tức là hội tụ hầu khắp nơi đến f trên X.

Vậy bổ đề được chứng minh. □

Định lý 2.15. *Hàm $f : X \to Y$ là đo được nếu và chỉ nếu tồn tại một dãy hàm đơn giản đo được hội tụ hầu khắp nơi đến f.*

Chứng minh. • "$\Leftarrow$": Suy ra từ Định lý 2.11.

• "$\Rightarrow$": Giả sử f là hàm đo được trên X. Khi đó ta có:

- Bởi Bổ đề 2.14, tồn tại dãy (f_n) các hàm đo được với tập giá trị đếm được và tập $N' \subset X$ có độ đo 0 sao cho

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{2}{n}, \quad \forall x \in\in X' = X \setminus N', \forall n \geq 1. \tag{2.6}$$

- Bởi Bổ đề 2.13, với mỗi hàm f_n tồn tại dãy các hàm đơn giản đo được $(f_{n,p})$ hội tụ đến f_n trên X.

- Ta sẽ chứng minh với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại tập đo được $B \subset X$ và $\mu(X \setminus B) < \epsilon$ sao cho với mọi $n \geq 1$, dãy $(f_{n,p})$ hội tụ đều đến f_n trên B.

Thật vậy: theo Định lý Egorov, tồn tại

$$B_1 \subset X, \mu(X \setminus B_1) < \frac{\epsilon}{2}$$

sao cho dãy $(f_{1,p})$ hội tụ đều tới f_1 trên B_1. Giả sử đã tìm được các tập $B_1, B_2, ..., B_k \subset X$ sao cho

$$\mu(X \setminus B_i) < \frac{\epsilon}{2^i}, i = 1, 2, ..., k.$$

Lấy $B'_{k+1} \subset B_k$ và $B''_{k+1} \subset X \setminus B_k$ sao cho

$$\mu(B_k \setminus B'_{k+1}) < \frac{\epsilon}{2^{k+2}} \quad \text{và} \quad \mu((X \setminus B_k) \setminus B''_k) < \frac{\epsilon}{2^{k+2}}.$$

Khi đó, với $B_{k+1} = B'_{k+1} \cup B''_{k+1}$ ta có

$$\mu(X \setminus B_{k+1}) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}.$$

Như vậy, bằng quy nạp ta đã xây dựng được dãy (B_k) các tập con đo được của X sao cho

$$\mu(X \setminus B_k) < \frac{\epsilon}{2^k}$$

với mọi $k \geq 1$ và thỏa mãn dãy $(f_{n,p})$ hội tụ đều đến f_n trên B_k với mọi $n \geq 1$.

Đặt

$$N'' = X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \quad \text{và} \quad N = N' \cup N''.$$

Khi đó $\mu(N) = 0$ vì $\mu(N') = 0$ và

$$\mu(N'') = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}(X \setminus B_k)\right) < \frac{\epsilon}{2^k}, \quad \forall k \geq 1.$$

Do dãy $(f_{n,p})$ hội tụ đều đến f_n trên mọi B_k nên với mỗi $n \geq 1$, tồn tại

$p_n \geq 1$ sao cho

$$d(f_{n,p_n}(x, f_n(x))) < \frac{1}{n}, \quad \forall x \in B_k, \forall k = 1, 2, ..., n. \tag{2.7}$$

Từ (2.6) và (2.7) ta suy ra

$$d(f_{n,p_n}(x), f_n(x)) \leq \frac{3}{n}, \quad \forall x \in X' \cap B_k, k = 1, 2, ..., n.$$

Như vậy, dãy hàm đơn giản đo được ($g_n = f_{n,p_n}$) hội tụ tới f trên $X \setminus N$.

Vậy định lý được chứng minh. □

Định lý 2.16. *Nếu $f : X \to Y$ là hàm đo được và tập giá trị $f(X)$ là tập compact tương đối trong Y (tức là $\overline{f(X)}$ là tập compact trong Y) thì tồn tại dãy hàm đơn giản đo được (f_n) hội tụ đều đến f trên X.*

Chứng minh. Chứng minh tương tự Bổ đề 2.14. □

Định lý 2.17 (Định lý Lusin). *Giả sử μ là độ đo Borel chính quy trên không gian metric X và f là hàm Borel từ X vào không gian metric khả ly Y (tức là tạo ảnh của tập Borel là một tập Borel). Nếu $A \subset X$ là một tập μ - đo được với $\mu(A) < +\infty$ thì với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại tập đóng $F \subset A$ sao cho:*

$$\mu(A \setminus F) < \epsilon \quad \text{và} \quad f|_F \text{ liên tục.}$$

Chứng minh. • Xét trường hợp f là hàm đơn giản đo được. Giả sử $f = y_i$ trên tập A_i với A_i là tập đo được và $A = \cup_i A_i$. Ta chọn tập đóng $F_i \subset A_i$ sao cho

$$\sum_i \mu(A_i \setminus F_i) < \epsilon.$$

Đặt $F = \cup_i A_i$. Ta có F là tập đóng thỏa mãn $\mu(A \setminus F) < \epsilon$ và $f|_F$ là liên tục.

• Xét trường hợp f là hàm Borel bất kỳ. Bởi Định lý 2.15, tồn tại dãy hàm đơn giản đo được (f_n) hội tụ hầu khắp nơi tới hàm f. Áp dụng trường hợp trên cho hàm f_n ta chọn được tập đóng F_n sao cho

$$\mu(A \setminus F_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$$

và $f|_{F_n}$ là hàm liên tục. Bởi Định lý Egorov, ta chọn được tập đo được $B \subset \cap F_n$ sao cho $\mu(A \setminus B) < \frac{\epsilon}{2}$ và dãy (f_n) hội tụ đều tới f trên B. Do đó, $f|_B$ là hàm liên tục. Ta chọn tập đóng $F \subset B \subset A$ sao cho

$$\mu(A \setminus F) < \epsilon.$$

Khi đó, $f|_F$ là hàm liên tục.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

2.4.2. Cấu trúc hàm đo được với giá trị vô hướng

Trước hết ta nhắc lại một số tính chất tô pô trên không gian các số thực và số thực mở rộng. Gọi $\tau(\mathbb{R})$ là tô pô trên $\mathbb{R}$. Khi đó, tập $G \subset \mathbb{R}$ là tập mở thì G có dạng:

$$G = \bigcup_{i \in I} (a_n, b_n), \ I \subset \mathbb{N}.$$

Ta gọi $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ là tập các số thực mở rộng. Gọi $\tau(\overline{\mathbb{R}})$ là tô pô trên $\overline{\mathbb{R}}$. Khi đó, $G \subset \overline{\mathbb{R}}$ là tập mở thì nó có các dạng sau:

$$G', G' \cup \{+\infty\}, G' \cup \{-\infty\}, G' \cup \{\pm\infty\}$$

với $G' \in \tau(\mathbb{R})$. Các không gian tô pô $\mathbb{R}$ và $\overline{\mathbb{R}}$ là các không gian khả ly và Hausdorff.

Từ các tính chất trên ta có, mọi hàm $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ đều có ảnh là hầu khả ly. Do đó, theo Định nghĩa 2.1, hàm f là đó được nếu và chỉ nếu $f^{-1}(G)$ là tập đo được với mọi $G \in \tau(\overline{\mathbb{R}})$.

Kết quả sau đây cho ta các tiêu chuẩn về hàm đo được giá trị vô hướng.

Định lý 2.18. *Cho $(X, \mathcal{F}, \mu)$ là một không gian đo được và $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm xác định trên X. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:*

(1) f là hàm đo được.

(2) $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{F}$, với mọi $a \in \mathbb{R}$.

(3) $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{F}$, với mọi $a \in \mathbb{R}$.

(4) $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{F}$, với mọi $a \in \mathbb{R}$.

(5) $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{F}$, với mọi $a \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. • "(1) $\Rightarrow$ (2)": Ta có, với mọi $a \in \mathbb{R}$ thì $(a, +\infty) \in \tau(\mathbb{R})$. Do f là hàm đo được nên ta có:

$$\{x \in X : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{F}.$$

• "(2) $\Rightarrow$ (3)": Với giá thiết (2) được thỏa mãn nên ta có

$$\{x \in X : f(x) \leq a\} = X \setminus \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{F}.$$

- "(3) ⇒ (4)": Với giả thiết (3) được thỏa mãn ta có
$$\{x \in X : f(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X : f(x) \le a - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}.$$
- "(4) ⇒ (5)": Với giả thiết (4) được thỏa mãn ta có
$$\{x \in X : f(x) \ge a\} = X \setminus \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{F}.$$
- "(5) ⇒ (1)": Giả sử (5) được thỏa mãn. Do các tập mở trong $\overline{\mathbb{R}}$ có dạng
$$G, G \cup \{+\infty\}, G \cup \{-\infty\}, G \cup \{\pm\infty\}$$

với $G \in \tau(\mathbb{R})$, nên để chứng minh f là hàm đo được ta chỉ cần chứng minh các tập
$$f^{-1}(G), f^{-1}(+\infty), f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{F}.$$

Thật vậy: trước hết với $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ta có
$$\begin{aligned} f^{-1}((a,b)) &= \{x \in X : f(x) > a\} \cap \{x \in X : f(x) < b\} \\ &= \left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X : f(x) \ge a + \frac{1}{n}\}\right] \bigcap \left[X \setminus \{x \in X : f(x) \ge b\}\right]. \end{aligned}$$

Bởi giả thiết (5) ta suy ra
$$f^{-1}((a,b)) \in \mathcal{F}.$$

Do các tập G có dạng
$$G = \bigcup_{i \in I}(a_i, b_i), I \subset \mathbb{N}.$$

Từ đây ta suy ra
$$f^{-1}(G) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(a_i, b_i) \in \mathcal{F}.$$

Ta có
$$f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{n \ge 1}\{x \in X : f(x) \ge n\} \in \mathcal{F}.$$
$$\begin{aligned} f^{-1}(-\infty) &= \bigcap_{n \ge 1}\{x \in X : f(x) < -n\} \\ &= \bigcap_{n \ge 1}\left[X \setminus \{x \in X : f(x) \ge -n\}\right] \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Vậy f là hàm đo được.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Sau đây là một số hệ quả.

Hệ quả 2.19. *Nếu $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm đo được thì với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ ta có các tập sau cũng đo được*

$$\{x \in X : a < f(x) < b\}, \ \{x \in X : a \leq f(x) \leq b\}$$
$$\{x \in X : a \leq f(x) < b\}, \ \{x \in X : a < f(x) \leq b\}.$$

Hệ quả 2.20. *Giả sử $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là các hàm đo được trên X với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, các hàm sau đây cũng đo được trên X:*

$$\begin{aligned} a(x) &= \inf_{n\geq 1} f_n(x), \\ A(x) &= \sup_{n\geq 1} f_n(x), \\ b(x) &= \liminf_{n\to\infty} f_n(x), \\ B(x) &= \limsup_{n\to\infty} f_n(x). \end{aligned}$$

Chứng minh. • Bởi Định lý 2.18, tính đo được của hàm $a(x)$ được suy ra từ đẳng thức sau đây

$$\{x \in X : a(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

• Bởi Định lý 2.18, tính đo được của hàm $A(x)$ được suy ra từ đẳng thức sau đây

$$\{x \in X : A(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

• Ta có

$$b(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_k(x)$$

và

$$B(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} f_k(x).$$

Bởi các kết quả ở trên ta suy ra $b(x)$ và $B(x)$ là các hàm đo được.

Vậy hệ quả được chứng minh. $\square$

Hệ quả 2.21. *Nếu dãy hàm đo được (f_n) hội tu hầu khắp nơi đến hàm f trên X thì f cũng là hàm đo được trên X.*

Chứng minh. Đặt

$$g(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x), \forall x \in X.$$

Bởi Hệ quả 2.19 ta có g là hàm đo được trên X.

Do $f_n \xrightarrow{\text{hkn}} f$ trên X nên tồn tại tập $N \subset X$ với $\mu(N) = 0$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X \setminus N.$$

Từ đó suy ra $f = g$ hầu khắp nơi trên X. Vậy f cũng là hàm đo được trên X (bởi Nhận xét 2.2(a)).

Vậy hệ quả được chứng minh. □

Sau đây ta sẽ xem xét một số tính chất của hàm đơn giản với giá trị vô hướng và sau đó đưa ra và chứng minh kết quả về cấu trúc của hàm đo được giá trị vô hướng.

Ta gọi hàm $f : X \to \mathbb{R}$ là hàm đơn giản nếu nó chỉ nhận một số hữu hạn giá trị. Dựa vào phép toán đại số trên $\mathbb{R}$ ta có kết quả sau đây về cấu trúc của hàm đơn giản giá trị vô hướng.

Định lý 2.22. *Hàm $f : X \to \mathbb{R}$ là hàm đơn giản trên X nếu và chỉ nếu nó có dạng sau đây*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x), \tag{2.8}$$

trong đó $a_i \in \mathbb{R}$, A_i là các tập đo được thỏa mãn

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j) \quad \text{và} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = X.$$

Chứng minh. • "⇒": Giả sử f là hàm đơn giản nhận các giá trị $a_1, a_2, ..., a_n$. Khi đó, bởi Mệnh đề 2.4 ta có $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$ là đo được. Hơn nữa ta có

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j), \bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$$

và

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x) \quad (\forall x \in X).$$

• "⇐" Giả sử hàm f xác định bởi công thức (2.8). Khi đó, f là hàm đơn giản nhận các giá trị $a_1, a_2, ..., a_n$. Tính đo được của hàm f được suy ra từ khẳng định sau đây.

$$\{x \in X : f(x) < a\} = \bigcup_i \{A_i : a_i < a\} \in \mathcal{F}.$$

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Hệ quả 2.23. *Cho $f, g : X \to \mathbb{R}$ là các hàm đơn giản đo được trên X và $a \in \mathbb{R}$. Khi đó, ta có $f + g$ và af cũng là các hàm đơn giản đo được trên X. Nói cách khác, tập các hàm đơn giản đo được trên X là một không gian vectơ.*

Chứng minh. Bởi Định lý 2.22, các hàm f, g có dạng như sau:

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i},\ A_i \text{ đo được } \ A_i \bigcap A_j = \emptyset\ (i \neq j), \bigcup_{i=1}^{n} A_i = X,$$
$$g = \sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{B_i},\ B_i \text{ đo được } \ B_i \bigcap B_j = \emptyset\ (i \neq j), \bigcup_{i=1}^{m} B_i = X.$$

Đặt $C_{ij} = A_i \cap B_j$. Ta có C_{ij} là các tập đo được, rời nhau đôi một và thỏa mãn

$$\bigcup_{i,j} C_{ij} = X.$$

Ta có công thức sau

$$f + g = \sum_{i,j} (a_i + b_j) \chi_{C_{ij}}.$$

Bởi Định lý 2.22 ta suy ra $f + g$ là hàm đo được trên X.

Với các ký hiệu như trên, ta có

$$af = \sum_{i=1}^{n} a.a_i \chi_{A_i}.$$

Do đó, af cũng là hàm đo được trên X.

Vậy hệ quả được chứng minh. $\square$

Định lý 2.24. *Hàm $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là đo được khi và chỉ khi tồn tại dãy hàm đơn giản đo được (f_n) với giá trị trên $\mathbb{R}$ hội tụ đến f. Hơn nữa, nếu $f \geq 0$ thì dãy hàm đơn giản đo được (f_n) có thể được chọn là dãy tăng các hàm không âm hội tụ đến f.*

Chứng minh. • "$\Rightarrow$": Giả sử $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm đo được.

- Ta xét trường hợp $f \geq 0$: Với mỗi $n \geq 1$, ta gọi phép chia đoạn $[0, n]$ thành $2^n n$ bằng nhau với độ dài mỗi đoạn là $\frac{1}{2^n}$ là phép chia thứ n. Ta định nghĩa hàm f_n bởi công thức sau:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & \text{nếu } \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}, i = 1, 2, ..., 2^n n \\ n & \text{nếu } f(x) \geq n. \end{cases}$$

Khi đó, dãy hàm (f_n) thỏa mãn các điều kiện sau:

i) f_n là hàm đơn giản đo được không âm.

ii) $f_1 \leq f_2 \leq ...$ và $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ với mọi $x \in X$.

Thật vậy: Đặt

$$A_i = \{x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\}, i = 1, 2, ..., 2^n n$$
$$A_{2^n n+1} = \{x \in X : f(x) \geq n\}.$$

Do f là đo được nên các tập A_i là đo được với mọi $i = 1, 2, ..., 2^n n + 1$. Suy ra f_n là hàm đo được. Vậy i) được chứng minh.

Ta sẽ chứng minh (f_n) là dãy tăng. Ta chú ý rằng, mỗi đoạn trong phép chia thứ n sẽ được chia làm 2 đoạn bằng nhau trong phép chia thứ $n+1$:

$$\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) = \left[\frac{2i-2}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}}\right) \bigcup \left[\frac{2i-1}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}}\right), i = 1, 2, ..., 2^n n. \quad (2.9)$$

Lấy $x \in X$. Nếu $f(x) \geq n$ thì ta có

$$f_{n+1}(x) \geq n = f_n(x).$$

Nếu $f(x) < n$ thì tồn tại $i \leq 2^n n$ sao cho

$$\frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}.$$

Từ (2.9) ta suy ra có 2 trường hợp xảy ra sau đây

$$f_{n+1}(x) = \frac{2i-2}{2^{n+1}} = f_n(x) \quad \text{hoặc} \quad f_{n+1}(x) = \frac{2i-1}{2^{n+1}} > f_n(x) = \frac{i-1}{2^n}.$$

Vậy ta luôn có $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, tức là (f_n) là dãy tăng.

Ta sẽ chứng minh

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

với mọi $x \in X$.

+ Nếu $f(x) < +\infty$ thì ta có

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n}.$$

Từ đây cho $n \to \infty$ ta suy ra $f_n(x) \to f(x)$.

+ Nếu $f(x) = +\infty$ thì $f_n(x) = n$ với mọi $n \leq 1$. Khi đó $f_n(x) \to f(x)$ khi $n \to \infty$.

Vậy ta luôn có $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, tức là ii) được chứng minh.

- Trường hợp f tùy ý: Ta đặt

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Khi đó, $f^+, f^- \geq 0$ và $f = f^+ - f^-$. Theo trường hợp trên thì tồn tại các dãy tăng các hàm đơn giản đo được, không âm (f_n^+) và (f_n^-) sao cho

$$\lim_{n\to\infty} f_n^+(x) = f^+(x) \quad \text{và} \quad \lim_{n\to\infty} f_n^-(x) = f^-(x).$$

Đặt $f_n = f_n^+ - f_n^-$. Khi đó ta có dãy (f_n) các hàm đơn giản đo được hội tụ đến f trên X.

• "$\Leftarrow$": Suy ra từ Hệ quả 2.20.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài 2.1. Chứng minh rằng hàm thực $f(x)$ là đo được trên tập A nếu và chỉ nếu hàm $f^3(x)$ đo được trên A.

Bài 2.2. Cho ví dụ chứng tỏ rằng hàm thực $f^2(x)$ đo được trên A, nhưng hàm $f(x)$ không đo được trên A.

Bài 2.3. Giả sử $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục và $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ là các hàm đo được. Chứng minh rằng hàm $h(x) = f(g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x))$ là đo được trên $\mathbb{R}$.

Bài 2.4. Gọi $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ là hàm đặc trưng của tập các số hữu tỷ và $f(x)$ là thực bất kỳ. Chứng minh rằng hàm $f(x)\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ là hàm đo được trên $\mathbb{R}$.

Bài 2.5. Chứng minh rằng nếu hàm số $f(x)$ đo được trên đoạn bất kỳ $[\alpha, \beta]$ với $a < \alpha < \beta < b$ thì hàm $f(x)$ cũng đo được trên đoạn $[a, b]$.

Bài 2.6. Chứng minh rằng nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm của đoạn $[a, b]$ thì hàm $f'(x)$ là hàm đo được trên đoạn $[a, b]$.

Bài 2.7. Cho A là một tập đo được và $f(x)$ là một hàm số xác định trên A. Chứng minh rằng nếu với mỗi số hữu tỷ r, tập hợp

$$\{x \in A : f(x) < r\}$$

là đo được thì hàm f là đo được trên A.

Bài 2.8. Cho không gian đo được $(X, \mathcal{F}, \mu)$ và $A \in \mathcal{F}$. Giả sử (f_n) và (g_n) là hai dãy hàm đo được xác định trên A và thỏa mãn các điều kiện sau:
i) $|f_n(x)| \leq M,\ |g_n(X)| \leq M$ với mọi $x \in A$ và với mọi $n \geq 1$.
ii) $f_n \xrightarrow{\mu} f,\ g_n \xrightarrow{\mu} g$ trên A.
Chứng minh rằng

$$f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg \quad \text{trên } A.$$

Chương 3
TÍCH PHÂN LEBESGUE

Nội dung của chương này bao gồm các khái niệm và kết quả liên quan tới tích phân Lebesgue của hàm đo được. Trong chương này ta cũng sẽ làm rõ mối quan hệ giữa tích phân Riemann[1] và tích phân Lebesgue[2].

3.1. Tích phân hàm đo được

3.1.1. Tích phân hàm đơn giản đo được không âm

Định nghĩa 3.1. Giả sử $(X, \mathcal{F}, \mu)$ là một không gian đo được và $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm đơn giản đo được không âm. Ta có thể viết f dưới dạng

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x) \quad (x \in X), \tag{3.1}$$

với $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, ..., n)$, $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$ với $i \neq i'$ và $X = \cup_{i=1}^{n} A_i$.

• Tích phân của hàm f (theo độ đo μ) trên X được ký hiệu và xác định như sau

$$\int_X f d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i). \tag{3.2}$$

(chú ý: trong tổng vế phải của (3.2) ta luôn quy ước $0.(+\infty) = 0$).

• Nếu tổng vế phải của (3.2) là hữu hạn thì ta nói hàm f khả tích trên X.

• Nếu $A \subset X$ là tập đo được và f là hàm đơn giản đo được không âm trên A. Khi đó, $\chi_A f$ là hàm đơn giản đo được không âm trên X. Tích phân của hàm f trên A được định nghĩa như sau:

$$\int_A f d\mu := \int_X \chi_A f d\mu.$$

Ta có một số nhận xét quan trọng sau đây

Nhận xét 3.2. Định nghĩa tích phân của hàm f trên X bởi công thức (3.2) không phụ thuộc vào việc biểu diễn hàm f dưới dạng công thức (3.1), và do đó định nghĩa tích phân ở trên là có nghĩa.

[1] Khái niệm tích phân Riemann được đặt theo tên nhà toán học người Đức: Bernhard Riemann (1826 - 1866)

[2] Khái niệm tích phân Lebesgue được đặt theo tên nhà toán học người Pháp: Henri Lebesgue (1875 - 1941)

Chứng minh. Giả sử hàm f có một biểu diễn khác như sau

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}(x)$$

với $B_j \in \mathcal{F}$ $(j = 1, 2, ..., m), B_j \cap B_{j'} = \emptyset$ với $j \neq j'$ và $X = \cup_{j=1}^{m} B_j$.

Ta có

$$\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j), \quad i = 1, 2, ..., n$$
$$\mu(B_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j), \quad j = 1, 2, ..., m.$$

Nếu $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ thì tồn tại $x_0 \in A_i \cap B_j$. Khi đó, ta có $a_i = b_j = f(x_0)$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{A_i \cap B_j \neq \emptyset}^{m} a_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{A_i \cap B_j \neq \emptyset}^{m} b_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j).
\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Vậy nhận xét được chứng minh. □

Sau đây là một số tính chất cơ bản.

Tính chất 1. Nếu f là hàm đơn giản đo được không âm thì $\int_X f d\mu \geq 0$.

Tính chất 2. Nếu hàm f khả tích trên X thì

$$\mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) < +\infty.$$

Chứng minh. Giả sử f được biểu diễn bởi

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x) \quad (x \in X)$$

với $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, ..., n)$, $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$ với $i \neq i'$ và $X = \cup_{i=1}^{n} A_i$.

Đặt $A = \{x \in X : f(x) > 0\}$. Ta có

$$A = A \cap X = A \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \bigcap A_i).$$

Đặt $a = \min\{a_i \neq 0 : i = 1, 2, ..., n\}$. Ta có $a > 0$ và

$$\begin{aligned} +\infty &> \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} a\mu(A \cap A_i) \\ &= a \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap A_i) \\ &= a\mu \left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i) \right) \\ &= a\mu(A). \end{aligned}$$

Suy ra $\mu(A) < +\infty$. □

Tính chất 3. Nếu f, g là các hàm đơn giản đo được không âm và $a \geq 0$ thì ta có

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu. \tag{3.3}$$

$$\int_X af d\mu = a \int_X f d\mu. \tag{3.4}$$

Chứng minh. Đẳng thức (3.4) là hiển nhiên. Ta sẽ chứng minh (3.3). Giả sử f và g có các biểu diễn như sau

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}.$$

Khi đó ta có

$$f + g = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} + \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j} = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\int_X (f+g)d\mu &= \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le m} (a_i+b_j)\mu(A_i\cap B_j)\\
&= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i\cap B_j) + \sum_{j=1}^m b_j \sum_{i=1}^n \mu(A_i\cap B_j)\\
&= \sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i) + \sum_{j=1}^m b_j\mu(B_j)\\
&= \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.
\end{aligned}$$

Vậy (2) được chứng minh. □

Tính chất 4. Nếu f và g là hai hàm đơn giản đo được không âm và $f \le g$ thì

$$\int_X f d\mu \le \int_X g d\mu.$$

Chứng minh. Đặt $g = f + h$ với $h = g - f$ là hàm đơn giản đo được không âm (bởi Hệ quả 2.23). Từ đây và áp dụng Tính chất 1 và 3 ta suy ra

$$\int_X g d\mu = \int_X f d\mu + \int_X h d\mu \ge \int_X f d\mu.$$

□

Tính chất 5. Với mọi $A \subset X$ là tập đo được ta có

$$\int_A d\mu = \mu(A).$$

Chứng minh.

$$\int_A d\mu = \int_X \chi_A d\mu = 0.\mu(X\setminus A) + 1.\mu(A) = \mu(A).$$

□

Tính chất 6. Cho $A \subset B \subset X$ là các tập đo được và f là hàm đơn giản đo được không âm trên X. Khi đó ta có

$$\int_A f d\mu \le \int_B f d\mu.$$

Chứng minh. Do $A \subset B$ nên $\chi_A \le \chi_B$. Suy ra $\chi_A f \le \chi_B f$. Áp dụng Tính chất 4 ta có

$$\int_A f d\mu = \int_X \chi_A f d\mu \le \int_X \chi_B f d\mu = \int_B f d\mu.$$

□

Tính chất 7. Cho A, B là các tập con đo được trong X và $A \cap B = \emptyset$ và f là hàm đơn giản đo được không âm trên X. Khi đó ta có

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

Chứng minh. Do $A \cap B = \emptyset$ nên $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$. Suy ra

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f d\mu &= \int_X \chi_{A\cup B} f d\mu \\ &= \int_X (\chi_A + \chi_B) f d\mu \\ &= \int_X \chi_A f d\mu + \int_X \chi_B f d\mu \\ &= \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.\end{aligned}$$

□

Tính chất 8. Cho $A \subset X$ là tập con đo được và f là hàm đơn giản đo được không âm trên X. Khi đó, nếu f khả tích trên X thì f khả tích trên A.

Chứng minh. Suy ra từ Tính chất 6. □

3.1.2. Tích phân hàm đo được không âm

Theo Định lý 2.24, mọi hàm đo được không âm đều là giới hạn của một dãy tăng các hàm đơn giản đo được không âm với giá trị trong $\mathbb{R}$. Kết quả này cùng với kết quả sau đây là cơ sở để ta đưa ra định nghĩa tích phân của hàm đo được không âm.

Định lý 3.3. *Cho $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm đo được không âm. Giả sử f là giới hạn của hai dãy tăng các hàm đơn giản đo được không âm với giá trị trong $\mathbb{R}$ là (f_n) và (g_n). Khi đó, hai dãy số $\left(\int_X f_n d\mu\right)$ và $\left(\int_X g_n d\mu\right)$ tồn tại giới hạn và*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu.$$

Để chứng minh Định lý 3.3 ta cần bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.4. *Giả sử h_0 và $h_1 \le h_2 \le ... \le h_n \le ...$ là các hàm đơn giản đo được không âm trên X và thỏa mãn*

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) \ge h_0(x) \quad (x \in X). \tag{3.5}$$

Khi đó

$$\lim_{n\to\infty}\int_X h_n d\mu \geq \int_X h_0 d\mu. \tag{3.6}$$

Chứng minh. Do dãy (h_n) là tăng nên theo Tính chất 4 ta có dãy số sau đây

$$\left(\int_X h_n d\mu\right) \subset \overline{\mathbb{R}}^+$$

là tăng và do đó tồn tại giới hạn sau

$$\lim_{n\to\infty}\int_X h_n d\mu.$$

Đặt

$$a = \min_{x\in X} h_0(x) \ \text{ và } \ b = \max_{x\in X} h_0(x).$$

Ta xét hai trường hợp sau đây.

• Khi $a > 0$: Chọn $0 < \epsilon < a$ tùy ý. Với mỗi $n \geq 1$ ta đặt

$$A_n = \{x \in X : h_n(x) > h_0(x) - \epsilon\}.$$

Do dãy hàm (h_n) là tăng và thỏa mãn (3.5) nên dãy (A_n) cũng tăng các tập đo được và thỏa mãn

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Bởi tính liên tục của độ đo (Định lý 1.20) ta có

$$\mu(X) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n). \tag{3.7}$$

- Với $\mu(X) = +\infty$ thì do

$$\begin{aligned}\int_X h_n d\mu &\geq \int_{A_n} h_n d\mu\\ &\geq \int_{A_n}(h_0-\epsilon)d\mu\\ &\geq \int_{A_n}(a-\epsilon)d\mu\\ &= (a-\epsilon)\mu(A_n), \quad (\forall n \geq 1).\end{aligned}$$

nên khi cho $n \to \infty$ ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\int_X h_n d\mu = +\infty.$$

Do đó (3.6) được thỏa mãn.

- Với $\mu(X) < +\infty$ thì từ (3.7) suy ra tồn tại $n_0 \geq 1$ sao cho

$$\mu(X \setminus A_n) = \mu(X) - \mu(A_n) < \epsilon, \quad (\forall n \geq n_0).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\int_X h_n d\mu &\geq \int_{A_n} h_n d\mu \\ &\geq \int_{A_n} (h_0 - \epsilon) d\mu \\ &= \int_{A_n} h_0 d\mu - \epsilon\mu(A_n) \\ &\geq \int_{A_n} h_0 d\mu - \int_{X\setminus A_n} h_0 d\mu - \epsilon\mu(X) \\ &\geq \int_{A_n} h_0 d\mu - \epsilon b - \epsilon\mu(X), \quad (\forall n \geq n_0).\end{aligned}$$

Hay

$$\int_X h_n d\mu \geq \int_{A_n} h_0 d\mu - \epsilon(b + \mu(X)), \quad (n \geq n_0).$$

Từ đó, cho $\epsilon \searrow 0$ ta thu được (3.6).

• Khi $a = 0$: Đặt

$$X_0 = \{x \in X : h_0(x) = 0\} \quad \text{và} \quad X_1 = X \setminus X_0.$$

Khi đó, ta có $\min_{x\in T_1} h_0(x) > 0$. Áp dụng trường hợp trên cho dãy hàm (h_n) trên tập X_1 ta có

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_1} h_n d\mu \geq \int_{X_1} h_0 d\mu.$$

Từ đây suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \int_X h_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_{X_1} h_n d\mu \geq \int_{X_1} h_0 d\mu = \int_X h_0 d\mu.$$

Vậy (3.6) được chứng minh.

Vậy bổ đề được chứng minh. □

Chứng minh Định lý 3.3:

Do (f_n) và (g_n) là các dãy tăng các hàm đơn giản đo được không âm nên suy ra $\left(\int_X f_n d\mu\right)$ và $\left(\int_X g_n d\mu\right)$ là các dãy số tăng và không âm. Và do đó các dãy số đó tồn tại giới hạn.

Với mỗi $m \geq 1$ ta có

$$g_m(x) \leq f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad (\forall x \in X).$$

Áp dụng Bổ đề 3.4 ta có

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X g_m d\mu, \quad (\forall m \geq 1).$$

Từ đây suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \lim_{m\to\infty} \int_X g_m d\mu. \tag{3.8}$$

Lập luận tương tự ta cũng có

$$\lim_{m\to\infty} \int_X g_m d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu. \tag{3.9}$$

Từ (3.8) và (3.9) suy ra định lý được chứng minh.

Sau đây ta sẽ định nghĩa tích phân của hàm đo được không âm.

Định nghĩa 3.5. Cho $f : X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ là hàm đo được không âm. Gọi (f_n) là dãy tăng các hàm đơn giản đo được không âm hội tụ tới f. Khi đó ta có các định nghĩa sau:

- Tích phân của hàm f trên X được ký hiệu và xác định như sau

$$\int_X f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

- Nếu $\int_X f d\mu < +\infty$ thì ta nói hàm f khả tích trên X.

- Nếu $A \subset X$ là tập đo được và f là hàm đo được không âm trên A. Khi đó, tích phân của hàm f trên A được định nghĩa như sau

$$\int_A f d\mu := \int_X \chi_A f d\mu.$$

Nhận xét 3.6. Tích phân của hàm đo được không âm cũng thỏa mãn các tính chất tương tự các Tính chất 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 của tích phân hàm đơn giản đo được không âm.

Sau đây ta sẽ phát biểu và chứng minh tính chất 7, các tính chất còn lại có thể được phát biểu và chứng minh tương tự.

Tính chất 7. Cho A, B là các tập con đo được trong X và $A \cap B = \emptyset$

và f là hàm đo được không âm trên X. Khi đó ta có

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

Chứng minh. Gọi (f_n) là dãy tăng các hàm đơn giản đo được không âm hội tụ đến f. Khi đó, $(\chi_{A\cup B} f_n), (\chi_A f_n)$ và $(\chi_B f_n)$ là các dãy tăng các hàm đơn giản đo được không âm hội tụ lần lượt tới các hàm $\chi_{A\cup B} f, \chi_A f$ và $\chi_B f$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
\int_{A\cup B} f d\mu &= \int_X \chi_{A\cup B} f d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \chi_{A\cup B} f_n d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_X \chi_A f_n d\mu + \int_X \chi_B f_n d\mu \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \chi_A f_n d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X \chi_B f_n d\mu \\
&= \int_X \chi_A f d\mu + \int_X \chi_B f d\mu \\
&= \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.
\end{aligned}$$

Vậy tính chất được chứng minh. $\square$

3.1.3. Tích phân hàm đo được tùy ý

Định nghĩa 3.7. Cho $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm đo được tùy ý. Ta viết hàm f dưới dạng

$$f = f^+ - f^-, \quad \text{với} \quad f^+ = \max(f, 0),\ f^- = \max(-f, 0).$$

• Giả sử các hàm đo được không âm f^+ và f^- có tích phân trên X không đồng thời bằng $+\infty$. Khi đó, tích phân của hàm f trên X được định nghĩa như sau:

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

• Nếu các tích phân $\int_X f^+ d\mu$ và $\int_X f^- d\mu$ đều hữu hạn (tức là tích phân $\int_X f d\mu$ hữu hạn) thì ta nói hàm f khả tích trên X.

• Cho $A \subset X$ là tập con đo được và $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm đo được tùy ý trên A. Khi đó, tích phân của hàm f trên A được định nghĩa như sau:

$$\int_A f d\mu := \int_X \chi_A f d\mu,$$

với điều kiện là tích phân $\int_X \chi_A f d\mu$ tồn tại.

3.2. Các tính chất cơ bản của tích phân

3.2.1. Tính chất cộng tính

Định lý 3.8. *Cho f là hàm đo được trên X và $A, B \subset X$ là các tập con đo được với $A \cap B = \emptyset$. Khi đó ta có*

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu, \tag{3.10}$$

với điều kiện các tích phân ở vế trái hoặc vế phải trong đẳng thức trên có nghĩa.

Chứng minh. • Nếu f là hàm đo được không âm thì định lý được chứng minh ở Tính chất 7.

• Giả sử f là hàm đo được tùy ý. Ta viết

$$f = f^+ - f^- \quad \text{với} \quad f^+ = \max(f, 0),\ f^- = \max(-f, 0).$$

Ta có

$$\int_{A\cup B} f^+ d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_B f^+ d\mu. \tag{3.11}$$

$$\int_{A\cup B} f^- d\mu = \int_A f^- d\mu + \int_B f^- d\mu. \tag{3.12}$$

Từ (3.11) và (3.12) ta suy ra tích phân vế trái của (3.10) có nghĩa nếu và chỉ nếu các tích phân vế phải có nghĩa. Thật vậy, nếu f có tích phân trên $A \cup B$ thì các tích phân vế trái của (3.11) và (3.12) không đồng thời bằng $+\infty$. Điều này tương đương với f có tích phân trên A và B và các tích phân này không đồng thời nhận hai giá trị vô cùng trái dấu. Ta có

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$$

và

$$\int_B f d\mu = \int_B f^+ d\mu - \int_B f^- d\mu.$$

Tức là tổng sau có nghĩa

$$\int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

Như vậy, với điều kiện là một trong hai vế của (3.10) có nghĩa thì ta có thể trừ từng vế của (3.11) và (3.12) cho nhau và ta thu được (3.10).

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Sau đây là một số hệ quả quan trọng.

Hệ quả 3.9. *Cho $A \subset X$ là tập đo được. Khi đó, nếu tồn tại $\int_X f d\mu$ thì tồn tại $\int_A f d\mu$. Hơn nữa, nếu f khả tích trên X thì f cũng khả tích trên A.*

Chứng minh. Áp dụng Định lý 3.8 cho các tập A và $CA = X \setminus A$ ta có:

• Tồn tại tích phân $\int_X f d\mu = \int_{A \cup CA} f d\mu$ nếu và chỉ nếu tồn tại các tích phân $\int_A f d\mu$ và $\int_{CA} f d\mu$. Và lúc này ta có:

$$\int_X f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{CA} f d\mu. \tag{3.13}$$

• Nếu f khả tích trên X thì tích phân vế phải của (3.13) là hữu hạn. Theo chứng minh Định lý 3.8, thì các tích phân vế phải của (3.13) không đồng thời nhận hai giá trị vô cùng trái dấu. Như vậy, hai tích phân vế phải cùng đồng thời hữu hạn. Tức là f khả tích trên A và CA.

Vậy hệ quả được chứng minh. $\square$

Hệ quả 3.10. *a) Nếu $\mu(A) = 0$ thì với mọi hàm đo được trên A ta có*

$$\int_A f d\mu = 0. \tag{3.14}$$

b) Nếu $A, B \subset X$ là các tập đo được và $\mu(B) = 0$ thì với mọi hàm f đo được trên $A \cup B$ ta có

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu. \tag{3.15}$$

Chứng minh. a) Ta xét các trường hợp sau.

• Trường hợp 1: f là hàm đơn giản đo được không âm thì (3.14) là đúng. Và do đó (3.14) cũng đúng khi f là hàm đo được không âm.

• Trường hợp 2: Giả sử f là hàm đo được tùy ý trên A. Khi đó ta viết

$$f = f^+ - f^- \quad \text{với} \quad f^+ = \max(f, 0),\ f^- = \max(-f, 0).$$

Theo trường hợp 1 ta có

$$\int_A f^+ d\mu = \int_A f^- d\mu = 0.$$

Suy ra

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu = 0.$$

b) Áp dụng Định lý 3.8 và a) ta có

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu = \int_A f d\mu,$$

tức là (3.15) được chứng minh.

Vậy hệ quả được chứng minh. □

3.2.2. Tính chất tuyến tính

Định lý 3.11. *a) Nếu f và g là các hàm đo được trên X thì*

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu, \tag{3.16}$$

với điều kiện các tích phân vế phải có nghĩa.

b) Nếu $a \in \mathbb{R}$ và f là hàm đo được trên X thì

$$\int_X a f d\mu = a \int_X f d\mu. \tag{3.17}$$

Để chứng minh Định lý 3.11 ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 3.12. *Nếu $u = v - w$ với u, v, w là các hàm đo được trên X và $v \geq u^+$ thì ta có*

$$\int_X u d\mu = \int_X v d\mu - \int_X w d\mu, \tag{3.18}$$

với điều kiện các tích phân vế phải có nghĩa.

Chứng minh. Ta viết $u = u^+ - u^-$. Suy ra $v - w = u^+ - u^-$. Do $v \geq u^+$ nên ta suy ra

$$h := v - u^+ = w - u^- \geq 0.$$

Suy ra

$$v = h + u^+ \geq 0 \quad \text{ và } \quad w = h + u^- \geq 0.$$

Áp dụng Tính chất 3 cho các hàm đo được không âm ta có

$$\int_X v d\mu = \int_X h d\mu + \int_X u^+ d\mu$$
$$\int_X w d\mu = \int_X h d\mu + \int_X u^- d\mu.$$

Do các tích phân vế phải của (3.18) có nghĩa, tức là các tích phân $\int_X v d\mu$ và $\int_X w d\mu$ không đồng thời nhận giá trị $+\infty$ nên suy ra $\int_X h d\mu < +\infty$.

Suy ra

$$\int_X v d\mu - \int_X w d\mu = \int_X u^+ d\mu - \int_X u^- d\mu = \int_X u d\mu.$$

Vậy bổ đề được chứng minh. $\square$

Chứng minh Định lý 3.11. a) Do các tích phân vế phải của (3.16) có nghĩa nên ta có thể viết

$$\begin{aligned}\int_X f d\mu + \int_X g d\mu &= \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu \\ &= \int_X (f^+ + g^+) d\mu - \int_X (f^- + g^-) d\mu.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Do $f^+ + g^+ \geq 0, \; f^- + g^- \geq 0$ và

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

nên suy ra $f^+ + g^+ \geq f + g$. Từ đấy suy ra $f^+ + g^+ \geq (f+g)^+$.

Áp dụng Bổ đề 3.12 cho $u = f + g, v = f^+ + g^+$ và $w = f^- + g^-$ ta có

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X (f^+ + g^+) d\mu - \int_X (f^- + g^-) d\mu. \tag{3.20}$$

Từ (3.19) và (3.20) ta suy ra (3.16).

b) • Nếu $a \geq 0$ thì ta có

$$(af)^+ = \max(af, 0) = a \max(f, 0) = a.f^+$$
$$(af)^- = \max(-af, 0) = a \max(-f, 0) = a.f^-.$$

Áp dụng Tính chất 3 cho các hàm đo được không âm ta có

$$\begin{aligned}\int_X af d\mu &= \int_X af^+ d\mu - \int_X af^- d\mu \\ &= a \int_X f^+ d\mu - a \int_X f^- d\mu \\ &= a \left(\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right) \\ &= a \int_X f d\mu.\end{aligned}$$

• Nếu $a < 0$ thì ta có

$$(af)^+ = \max(af, 0) = -a \max(-f, 0) = -af^-$$
$$(af)^- = \max(-af, 0) = -a \max(f, 0) = -af^+.$$

Áp dụng Tính chất 3 cho các hàm đo được không âm ta có

$$\begin{aligned}\int_X af d\mu &= \int_X (af)^+ d\mu - \int_X (af)^- d\mu \\ &= \int_X -af^- d\mu - \int_X -af^+ d\mu \\ &= -a\int_X f^- d\mu + a\int_X f^+ d\mu \\ &= a\int_X f d\mu.\end{aligned}$$

Vậy định lý được chứng minh. □

Hệ quả 3.13. *Nếu f, g là các hàm khả tích thì $af + bg$ cũng là hàm khả tích với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ và*

$$\int_X (af + bg) d\mu = a\int_X f d\mu + b\int_X g d\mu.$$

Chứng minh. Suy ra từ a) và b) của Định lý 3.11. □

3.2.3. Tính chất bảo toàn thứ tự

Định lý 3.14. *Nếu f và g là các hàm đo được và $f = h$ hầu khắp nơi trên X thì*

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu.$$

Đặc biệt, nếu $f = 0$ hầu khắp nơi trên X thì $\int_X f d\mu = 0$.

Chứng minh. Đặt $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Bởi giả thiết ta có $\mu(A) = 0$. Áp dụng Hệ quả 3.10b) ta có

$$\begin{aligned}\int_X f d\mu &= \int_{(X\setminus A)\cup A} f d\mu \\ &= \int_{X\setminus A} f d\mu \\ &= \int_{X\setminus A} g d\mu \\ &= \int_{(X\setminus A)\cup A} g d\mu \\ &= \int_X g d\mu.\end{aligned}$$

Vậy định lý được chứng minh. □

Định lý 3.15. *Nếu f và g là các hàm đo được và $f \geq g$ hầu khắp nơi trên X thì*
$$\int_X f d\mu \geq \int_X g d\mu.$$

Đặc biệt, nếu $f \geq 0$ hầu khắp nơi trên X thì $\int_X f d\mu \geq 0$.

Chứng minh. • Trường hợp 1: giả sử $f \geq g$ trên X.

Ta viết $f = f^+ - f^-, g = g^+ - g^-$. Khi đó ta có
$$\begin{cases} f^+ \geq f \geq g \\ f^+ \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f^+ \geq g^+.$$

Và
$$\begin{cases} g^- \geq -g \geq -f \\ g^- \geq 0 \end{cases} \Rightarrow g^- \geq f^-.$$

Áp dụng Tính chất 4 cho các hàm đo được không âm ta có
$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \geq \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu = \int_X g d\mu.$$

• Trường hợp 2: giả sử $f \geq g$ hầu khắp nơi trên X.
Đặt $A = \{x \in X : f(x) < g(x)\}$. Bởi giả thiết ta có $\mu(A) = 0$. Áp dụng Định lý 3.15 và trường hợp 1 ta có
$$\int_X f d\mu = \int_{X \setminus A} f d\mu \geq \int_{X \setminus A} g d\mu = \int_X g d\mu.$$

Vậy định lý được chứng minh. □

Hệ quả 3.16. *Cho $A \subset X$ là tập con đo được. Khi đó, nếu f khả tích trên X thì f khả tích trên A.*

Chứng minh. • Trường hợp 1: giả sử $f \geq 0$.

Ta có $\chi_A f \leq f$ trên X. Áp dụng Định lý 3.15 ta có
$$0 \leq \int_A f d\mu = \int_X \chi_A f d\mu \leq \int_X f d\mu \leq +\infty.$$

• Trường hợp 2: f là hàm tùy ý.

Ta viết $f = f^+ - f^-$. Do f khả tích trên X nên các hàm f^+ và f^- khả tích trên X. Bởi trường hợp 1 ta có f^+ và f^- khả tích trên A. Suy ra f khả tích trên A.

Vậy hệ quả được chứng minh. □

Hệ quả 3.17. *Nếu f khả tích trên X thì f hữu hạn hầu khắp nơi trên X.*

Chứng minh. • Trường hợp 1: giả sử $f \geq 0$.

Đặt

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\}.$$

Bởi Hệ quả 3.16 ta có f khả tích trên A. Với mọi $n \geq 1$ ta có $f \geq n$ trên A. Áp dụng Định lý 3.15 ta có

$$+\infty > \int_A f d\mu \geq \int_A n d\mu = n\mu(A), \quad (\forall n \geq 1).$$

Điều này suy ra $\mu(A) = 0$.

• Trường hợp 2: f là hàm tùy ý.

Ta viết $f = f^+ - f^-$ với f^+ và f^- không đồng thời bằng $+\infty$. Khi đó, ta có

$$A = \{x \in X : f(x) = -\infty \text{ hoặc } f(x) = +\infty\} = A_1 \cup A_2,$$

với

$$A_1 = \{x \in X : f^+(x) = +\infty\}, \; A_2 = \{x \in X : f^-(x) = +\infty\}.$$

Do f khả tích trên X nên các hàm f^+ và f^- khả tích trên X. Áp dụng trường hợp 1 ta có f^+ và f^- hữu hạn hầu khắp nơi trên X, tức là

$$\mu(A_1) = \mu(A_2) = 0.$$

Suy ra

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = 0,$$

tức là f là hữu hạn hầu khắp nơi trên X.

Vậy hệ quả được chứng minh. □

Hệ quả 3.18. *Nếu $f \geq 0$ và $\int_X f d\mu = 0$ thì $f = 0$ hầu khắp nơi trên X.*

Chứng minh. Đặt

$$A_n = \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$$

với mọi $n \geq 1$. Ta có
$$0 = \int_X f d\mu = \int_{X \setminus A_n} f d\mu + \int_{A_n} f d\mu \geq \int_{A_n} f d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(A_n).$$

Suy ra $\mu(A_n) = 0$. Ta có thể kiểm tra rằng, đẳng thức sau là đúng
$$A := \{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Suy ra
$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0,$$
tức là $f = 0$ hầu khắp nơi trên X.

Vậy hệ quả được chứng minh. □

Định lý 3.19. *Nếu hàm f có tích phân trên X thì*
$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$
Hơn nữa, f khả tích trên X nếu và chỉ nếu $|f|$ khả tích trên X.

Chứng minh. Ta có $|f| = f^+ + f^-$. Áp dụng tính chất tuyến tính của tích phân hàm đo được (Định lý 3.11a)) ta có
$$\begin{aligned}
\int_X |f| d\mu &= \int_X (f^+ + f^-) d\mu \\
&= \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu \\
&\geq \left| \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right| \\
&= \left| \int_X f d\mu \right|.
\end{aligned}$$

Vậy định lý được chứng minh. □

Định lý 3.20. *Giả sử $\mu(X) < +\infty$. Khi đó, mọi hàm đo được bị chặn trên X đều khả tích trên X.*

Chứng minh. Bởi f bị chặn trên X nên ta có
$$M := \sup\{|f(x)| : x \in X\} < +\infty.$$

Khi đó, ta có $f^+ \leq M$ và $f^- \leq M$ trên X. Suy ra

$$\int_X f^+ d\mu \leq \int_X M d\mu = M\mu(X) < +\infty$$
$$\int_X f^- d\mu \leq \int_X M d\mu = M\mu(X) < +\infty.$$

Vậy hàm f khả tích trên X.

Vậy định lý được chứng minh. □

3.3. Qua giới hạn dưới dấu tích phân

Mục này chúng ta tìm hiểu xem với điều kiện nào thì ta có đẳng thức sau

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} f_k d\mu.$$

Với tích phân Riemann trong $\mathbb{R}^n$ thì điều kiện là dãy hàm (f_k) phải hội tụ đều trên miền lấy tích phân, đây là điều kiện khá chặt. Với tích phân Lebesgue, trong mục này chúng ta sẽ thấy điều kiện nhẹ hơn. Đặc biệt là các điều kiện này là khá phổ biến trong nhiều vấn đề khác nhau của toán học.

Trước hết, chúng ta sẽ trình bày một số kết quả chuẩn bị.

Định lý 3.21. *Cho (f_k) là một dãy các hàm đo được không âm trên X. Đặt*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad (x \in X).$$

Khi đó ta có

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu.$$

Chứng minh. Với mọi $m \geq 1$ ta có

$$\sum_{k=1}^{m} f_k \leq f.$$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^{m} \int_X f_k d\mu = \int_X \left(\sum_{k=1}^{m} f_k\right) d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

Cho $m \to \infty$ ta có
$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu \le \int_X f d\mu. \tag{3.21}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh chiều ngược lại. Với mỗi $k \ge 1$, ta gọi $(f_{k,m})_{m\ge 1}$ là dãy tăng các hàm đơn giản đo được không âm hội tụ đến f_k. Khi đó ta có
$$\int_X f_k d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_X f_{k,m} d\mu \quad (k = 1, 2, 3, ...).$$

Đặt
$$g_m = \sum_{k=1}^{m} f_{k,m}.$$

Ta có, (g_m) là dãy các hàm đơn giản đo được không âm. Hơn nữa
$$\begin{aligned} g_{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} f_{k,m+1} &= \sum_{k=1}^{m} f_{k,m+1} + f_{m+1,m+1} \\ &\ge \sum_{k=1}^{m} f_{k,m} + f_{m+1,m} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} f_{k,m} = g_m. \end{aligned}$$

Suy ra, dãy (g_m) là dãy tăng.

Mặt khác, với $1 \le p \le m$ ta có
$$\sum_{k=1}^{p} f_{k,m} \le \sum_{k=1}^{m} f_{k,m} = g_m \le \sum_{k=1}^{m} f_n \le f.$$

Cho $m \to \infty$ ta thu được
$$\sum_{k=1}^{p} f_k \le \lim_{m\to\infty} g_m \le f.$$

Các đánh giá trên thỏa mãn với mọi $p \ge 1$, nên cho $p \to \infty$ ta thu được
$$\lim_{m\to\infty} g_m = f.$$

Vậy ta có (g_m) là dãy tăng các hàm đơn giản đo được không âm hội tụ đến f. Theo định nghĩa tích phân của f trên X ta có

$$\begin{aligned}\int_X f d\mu &= \lim_{m\to\infty} \int_X g_m d\mu \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_X \left(\sum_{k=1}^{m} f_{k,m}\right) d\mu \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_X f_{k,m} d\mu \\ &\le \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_{k,m} d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \int_X f_{k,m} d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Từ (3.21) và (3.22) ta suy ra điều phải chứng minh.

Vậy định lý được chứng minh. □

Sau đây là một hệ quả của Định lý 3.21 mà ta sẽ gọi là tính chất σ - cộng tính của tích phân.

Hệ quả 3.22. *Cho $X = \cup_{k=1}^{\infty} X_k$ với X_k là các tập đo được, đôi một rời nhau. Khi đó, nếu tích phân $\int_X f d\mu$ có nghĩa thì ta có*

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} f d\mu.$$

Chứng minh. • Ta xét trường hợp $f \geq 0$: Do

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$$

với X_k là các tập đo được, nên ta có

$$1 = \chi_X = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{X_k}.$$

Khi đó, nếu đặt $f_k = \chi_{X_k} f, k = 1, 2, 3, ...$ thì f_k là các hàm đo được không âm và thỏa mãn

$$f = \chi_X f = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{X_k} f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Áp dụng Định lý 3.21 ta có

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \chi_{X_k} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} f d\mu.$$

- Ta xét trường hợp f là hàm đo được tùy ý: Ta đặt

$$f = f^+ - f^-.$$

Do $\int_X f d\mu$ là có nghĩa nên ta có

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Áp dụng trường hợp trên cho các hàm f^+ và f^- ta có

$$\int_X f^+ d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} f^+ d\mu \quad \text{và} \quad \int_X f^- d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} f^- d\mu.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\int_X f d\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} f^+ d\mu - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} f^- d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{X_k} f^+ d\mu - \int_{X_k} f^- d\mu \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} (f^+ - f^-) d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} f d\mu.
\end{aligned}$$

Vậy hệ quả được chứng minh. □

Bây giờ, chúng ta sẽ bắt đầu trình bày các kết quả qua giới hạn dưới dấu tích phân. Kết quả sau đây là Định lý Lebesgue - Levi cho phép qua giới hạn dưới dấu tích phân đối với dãy tăng các hàm đo được không âm.

Định lý 3.23 (**Định lý Lebesgue - Levi về hội tụ đơn điệu**). *Nếu*

(f_k) là dãy tăng các hàm đo được không âm trên X hội tụ tới f, thì ta có

$$\lim_{k\to\infty}\int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu. \tag{3.23}$$

Chứng minh. Bởi Hệ quả 2.20 ta có f là hàm đo được. Để chứng minh (3.23) ta sẽ xét hai trường hợp sau đây.

- Tồn tại $k_0 \geq 0$ sao cho

$$\int_X f_{k_0} d\mu = +\infty.$$

Do $f_{k_0} \leq f_k \leq f$ với mọi $k \geq k_0$ nên ta có

$$+\infty = \int_X f_{k_0} d\mu \leq \int_X f_k d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

Từ đây suy ra (3.23) được chứng minh.

- Hàm f_k khả tích với mọi $k \geq 1$:

Đặt $g_0(x) = 0,\ g_1(x) = f_1(x)$ với mọi $x \in X$ và

$$g_{k+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f_k(x) = +\infty \\ f_{k+1}(x) - f_k(x) & \text{nếu } f_k(x) < +\infty. \end{cases}$$

Khi đó, (g_k) là dãy các hàm đo được không âm và thỏa mãn

$$f_k = \sum_{j=1}^{k} g_j \quad \text{trên } X.$$

Suy ra

$$\lim_{k\to+\infty} f_k = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \quad \text{trên } X.$$

Áp dụng Định lý 3.21 ta có

$$\begin{aligned}\int_X f d\mu = \int_X \left(\lim_{k\to+\infty} f_k\right) d\mu &= \sum_{j=1}^{\infty}\int_X g_j d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_X f_j d\mu - \int_X f_{j-1} d\mu\right) \\ &= \lim_{j\to+\infty}\int_X f_j d\mu,\end{aligned}$$

tức là (3.23) được chứng minh.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Hệ quả sau đây cho phép qua giới hạn dưới dấu tích phân đối với dãy tăng các hàm đo được.

Hệ quả 3.24. *Nếu (f_k) là dãy tăng các hàm đo được hội tụ tới hàm f trên X với f_1 là khả tích trên X thì ta có*

$$\lim_{k\to+\infty}\int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu. \tag{3.24}$$

Chứng minh. Bởi giả thiết ta suy ra $(f_k - f_1)_{k\geq 1}$ là dãy tăng các hàm đo được không âm hội tụ đến hàm $f - f_1$. Áp dụng Định lý 3.23 ta có

$$\lim_{k\to+\infty}\int_X (f_k - f_1) d\mu = \int_X (f - f_1) d\mu. \tag{3.25}$$

Do f_1 khả tích trên X nên ta có

$$\int_X (f_k - f_1) d\mu = \int_X f_k d\mu - \int_X f_1 d\mu$$

và

$$\int_X (f - f_1) d\mu = \int_X f d\mu - \int_X f_1 d\mu.$$

Những kết quả này cùng với (3.25) ta suy ra (3.24).

Vậy hệ quả được chứng minh. $\square$

Sau đây ta sẽ trình bày bổ đề Fatou, để chuẩn bị cho việc trình bày định lý qua giới hạn dưới dấu tích phân tiếp theo.

Bổ đề 3.25. *Nếu (f_k) là dãy hàm đo được không âm trên X thì ta có*

$$\int_X \left(\liminf_{k\to+\infty} f_k\right) d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty}\int_X f_k d\mu. \tag{3.26}$$

Chứng minh. Với mỗi $k \geq 1$ ta đặt

$$g_k = \inf\{f_{k+j} : j \geq 0\}.$$

Khi đó, (g_k) là dãy tăng các hàm đo được không âm trên X và

$$g_k \leq f_{k+j} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 0$$
$$\lim_{k\to+\infty} g_k = \sup_{k\geq 1}\inf\{f_{k+j} : j \geq 1\} = \liminf_{k\to+\infty} f_k.$$

Áp dụng Định lý 3.23 cho dãy (g_k) ta có

$$\int_X \left(\liminf_{k\to+\infty} f_k\right) d\mu = \int_X \left(\lim_{k\to+\infty} g_k\right) d\mu = \lim_{k\to+\infty}\int_X g_k d\mu. \tag{3.27}$$

Do $g_k \le f_{k+j}$ với mọi $j \ge 0$ nên ta có

$$\int_X g_k d\mu \le \int_X f_{k+j} d\mu \quad (\forall j \ge 0).$$

Suy ra

$$\int_X g_k d\mu \le \inf \left\{ \int_X f_{k+j} d\mu : j \ge 0 \right\}.$$

Cho $k \to +\infty$ ta có

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} \int_X g_k d\mu &\le \lim_{k\to+\infty} \left(\inf \left\{ \int_X f_{k+j} d\mu : j \ge 0 \right\} \right) \\ &= \sup_{k\ge1} \inf \left\{ \int_X f_{k+j} d\mu : j \ge 0 \right\} \qquad (3.28) \\ &= \liminf_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu. \end{aligned}$$

Từ (3.27) và (3.28) ta suy ra (3.26).

Vậy bổ đề được chứng minh. □

Sau đây là một số hệ quả của Bổ đề Fatou.

Hệ quả 3.26. *Nếu (f_k) là dãy các hàm đo được trên X thỏa mãn $f_k \ge g, \forall k \ge 1$ với g là hàm khả tích trên X thì ta có*

$$\int_X \left(\liminf_{k\to+\infty} f_k \right) d\mu \le \liminf_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu.$$

Chứng minh. Bởi giả thiết ta có $(f_k - g)$ là dãy các hàm đo được không âm trên X. Áp dụng Bổ đề Fatou ta có

$$\int_X \liminf_{k\to+\infty} (f_k - g) d\mu \le \liminf_{k\to+\infty} \int_X (f_k - g) d\mu.$$

Do g là hàm khả tích trên X nên đánh giá trên ta suy ra

$$\int_X \left(\liminf_{k\to+\infty} f_k \right) d\mu \le \liminf_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu,$$

tức là hệ quả được chứng minh.

Vậy hệ quả được chứng minh. □

Hệ quả 3.27. *Nếu (f_k) là dãy các hàm đo được trên X thỏa mãn $f_k \le g$, $\forall k \ge 1$ với g là hàm khả tích trên X thì ta có*

$$\int_X \left(\limsup_{k\to+\infty} f_k \right) d\mu \ge \limsup_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu.$$

Chứng minh. Từ giả thiết ta có $-f_k \geq -g, \forall k \geq 1$. Áp dụng Hệ quả 3.27 cho dãy $(-f_k)$ ta có

$$\int_X \left(\liminf_{k\to+\infty}(-f_k)\right) d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_X (-f_k) d\mu$$
$$\Leftrightarrow \int_X \left(-\limsup_{k\to+\infty} f_k\right) d\mu \leq -\limsup_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu$$
$$\Leftrightarrow \int_X \left(\limsup_{k\to+\infty} f_k\right) d\mu \geq \limsup_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu.$$

Vậy hệ quả được chứng minh. □

Sau đây ta phát biểu và chứng minh Định lý Lebesgue qua giới hạn dưới dấu tích phân cho dãy hàm đo được bị chặn đều bởi một hàm khả tích.

Định lý 3.28 (Định lý Lebesgue về sự hội tụ bị chặn). *Cho (f_k) là dãy các hàm đo được trên X thỏa mãn các kiều kiện sau:*

i) (f_k) bị chặn đều bởi một hàm không âm g khả tích trên X, tức là

$$|f_k(x)| \leq g(x), \quad (\forall k \geq 1, \forall x \in X);$$

ii) Dãy (f_k) hội tụ hầu khắp nơi hoặc hội tụ theo độ đo μ tới hàm f.

Khi đó ta có hàm f khả tích trên X và

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu.$$

Chứng minh. Do g là hàm khả tích nên g là hữu hạn hầu khắp nơi trên X. Vì vậy, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử g là hữu hạn trên X.

- Ta xét trường hợp $f_k \xrightarrow{\text{hkn}} f$ trên X. Khi đó

$$\mu(\{x \in X : f_k(x) \nrightarrow f(x)\}) = 0.$$

Bởi tính chất của tích phân Lebesgue, ta có thể giả sử $f_k \to f$ trên X. Bởi giả thiết

$$|f_k(x)| \leq g(x), \quad (\forall k \geq 1, \forall x \in X),$$

suy ra $|f(x)| \leq g(x)$ với mọi $x \in X$. Bất đẳng thức này cùng với giả thiết g hữu hạn trên X suy ra f là hàm khả tích trên X.

Ta còn phải chứng minh

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu.$$

Áp dụng Bổ đề Fatou cho dãy hàm $(g + f_k)$ ta có

$$\int_X \liminf_{k\to\infty}(g + f_k)d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_X (g + f_k)d\mu$$

$$\Leftrightarrow \int_X gd\mu + \int_X \liminf_{k\to\infty} f_k d\mu \le \int_X gd\mu + \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k d\mu.$$

Do g khả tích trên X ta suy ra

$$\int_X fd\mu = \int_X \liminf_{k\to\infty} f_k d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k d\mu. \tag{3.29}$$

Mặt khác, do $g - f_k \ge 0$ và

$$\liminf_{k\to\infty}(g - f_k) = g - \limsup_{k\to\infty} f_k,$$

nên áp dụng Bổ đề Fatou ta có

$$\int_X \liminf_{k\to\infty}(g - f_k)d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_X (g - f_k)d\mu$$

$$\Leftrightarrow \int_X gd\mu - \int_X \limsup_{k\to\infty} f_k d\mu \le \int_X gd\mu - \limsup_{k\to\infty} \int_X f_k d\mu.$$

Bởi g khả tích trên X, ta suy ra

$$\int_X fd\mu = \int_X \limsup_{k\to\infty} f_k d\mu \ge \limsup_{k\to\infty} \int_X f_k d\mu. \tag{3.30}$$

Từ (3.29) và (3.30) ta suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k d\mu = \int_X fd\mu.$$

• Ta xét trường hợp $f_k \xrightarrow{\mu} f$ trên X. Khi đó, bởi Định lý 2.12, tồn tại dãy con (f_{k_n}) hội tụ hầu khắp nơi đến f trên X. Bởi trường hợp trên ta suy ra f khả tích.

Từ định nghĩa của giới hạn trên ta suy ra tồn tại dãy (k_n) sao cho

$$\limsup_{k\to\infty} \int_X f_k d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_{k_n} d\mu.$$

Do

$$f_{k_n} \xrightarrow{\mu} f \quad \text{trên } X$$

nên bởi Định lý 2.12 suy ra tồn tại dãy con (k_{n_j}) sao cho

$$f_{k_{n_j}} \xrightarrow{\text{hkn}} f \quad \text{trên } X.$$

Áp dụng trường hợp trên ta có

$$\lim_{j\to\infty}\int_X f_{k_{n_j}}d\mu = \int_X f d\mu.$$

Vậy ta có

$$\limsup_{k\to\infty}\int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu. \tag{3.31}$$

Lập luận tương tự như trên cho giới hạn dưới, ta cũng nhận được đẳng thức sau

$$\liminf_{k\to\infty}\int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu. \tag{3.32}$$

Từ (3.31) và (3.32) ta suy ra

$$\lim_{k\to\infty}\int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu.$$

Vậy định lý được chứng minh. □

Hệ quả 3.29. *Cho* (f_k) *là dãy các hàm đo được trên* X *và* $\mu(X) < +\infty$*. Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

i) $|f_k(x)| \leq M\ \forall x \in X, \forall k \geq 1$ *(*M *là hằng số);*

ii) Dãy (f_k) *hội tụ hầu khắp nơi hoặc hội tụ theo độ đo đến hàm* f*.*

Khi đó: hàm f *khả tích trên* X *và*

$$\lim_{k\to\infty}\int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu.$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý 3.28 cho hàm $g(x) = M$ với mọi $x \in X$. □

3.4. Mối liên hệ giữa tích phân Riemann và tích phân Lebesgue

Trong mục này chúng ta sẽ tìm hiểu mối liên hệ giữa tích phân Riemann và tích phân Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$ theo độ đo Lebesgue μ trên $\mathbb{R}^n$. Ở đây, $\mathbb{R}^n$ được xem như không gian metric với khoảng cách max: Với

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

ta có

$$\rho(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, 2, ..., n\}.$$

Định lý 3.30. *Cho* f *là hàm số xác định trên gian compact* $\Delta \subset \mathbb{R}^n$*. Khi đó,* f *là khả tích Riemann trên* Δ *nếu và chỉ nếu tập tất cả các điểm* *giián đoạn của f có độ đo Lebesgue bằng* 0.

Chứng minh. • "⇒": Do f khả tích (R) trên Δ nên suy ra f bị chặn trên Δ, tức là

$$M = \sup\{|f(x)| : x \in \Delta\} < +\infty.$$

Đặt

$$D_k = \{x \in \Delta : \omega_f(x) \geq \frac{1}{k}\},\ k \geq 1 \ \text{ và } D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k,$$

ở đây $\omega_f(x)$ là dao động của f tại x, tức là

$$\omega_f(x) = \limsup_{y \to x} f(y) - \liminf_{y \to x} f(y).$$

Khi đó, D là tập tất cả các điểm gian đoạn của f. Vì vậy, ta sẽ chứng minh độ đo Lebesgue của D bằng 0: $\mu^*(D) = 0$.

Thật vậy: Với $k \geq 1$ và $\epsilon > 0$ tùy ý. Giả sử π là một phân hoạch của Δ thành các gian nhỏ $\Delta_1, ..., \Delta_m$ bởi các siêu phẳng song song với các siêu phẳng tọa độ, sao cho

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_j.|\Delta_j| < \frac{\epsilon}{k2^k}, \tag{3.33}$$

ở đây ω_j là dao động của f trên Δ_j, tức là

$$\omega_j = \sup\{|f(x') - f(x)| : x, x' \in \Delta_j\}.$$

Đặt

$$F = \bigcup_{j=1}^{m} \partial\Delta_j.$$

Khi đó, F là tập đóng trong $\mathbb{R}^n$, $\mu^*(F) = 0$ và với $x \in D_k \setminus F$ thì x là một điểm trong của Δ_j nào đó. Đặt

$$J = \{j : 1 \leq j \leq m, (Int\Delta_j) \cap (D_k \setminus F) \neq \emptyset\}.$$

Khi đó, ta có

$$D_k \setminus F \subset \bigcup_{j \in J} Int\Delta_j \ \text{ và } \ \omega_j \geq \frac{1}{k} \ \text{ với } \ j \in J. \tag{3.34}$$

Từ (3.33) và (3.34) ta suy ra

$$\mu^*(D_k \setminus F) \leq \sum_{j \in J} |\Delta_j| \leq k \sum_{j \in J} \omega_j.|\Delta_j| < \epsilon.$$

Từ đây suy ra

$$\mu^*(D_k) \le \mu^*(D_k \setminus F) + \mu^*(F) < \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Vậy ta có

$$\mu^*(D) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(D_k) = \epsilon.$$

Do $\epsilon > 0$ tùy ý nên ta có $\mu^*(D) = 0$.

- "$\Leftarrow$": Với $\epsilon > 0$ cho trước. Chọn $k_0 \ge 1$ sao cho $\frac{1}{k_0} < \epsilon$.

Bởi giả thiết $\mu^*(D) = 0$ nên suy ra $\mu^*(D_{k_0}) = 0$. Do vậy tồn tại lân cận mở G của D_{k_0} sao cho $\mu(G) < \epsilon$ (xem Định lý 1.39).

Mặt khác, do D_{k_0} là tập đóng nên nó là compact trong Δ. Do đó, tồn tại lân cận mở G_1 của D_{k_0} trong G sao cho

$$\delta_1 = \rho(G_1, \partial G) = \inf\{\rho(x, y) : x \in G_1, y \in \partial G\} > 0.$$

Do $K = \Delta \setminus G_1$ là tập compact và $\omega_f(x) < \frac{1}{k_0}$ với mọi $x \in K$, nên tồn tại $\delta_2 > 0$ sao cho dao động $\omega_f(V)$ của f trên mọi tập con $V \subset K$ với đường kính $d(V) < \delta_2$ bé hơn $\frac{1}{k_0}$, tức là

$$\omega_f(V) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in V\} < \frac{1}{k_0}.$$

Đặt $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Gọi π là một phân hoạch của Δ thành các gian nhỏ $\Delta_1, ..., \Delta_m$ sao cho $d(\pi) < \delta$, ở đây $d(\pi)$ là độ dài đường kính lớn nhất trong các đường kính của $\Delta_1, ..., \Delta_m$.

Đặt

$$J_1 = \{1 \le j \le m : \Delta_j \cap G_1 \ne \emptyset\}$$
$$J_2 = \{1 \le j \le m : j \notin J_1\}.$$

Do $d(\pi) < \delta \le \delta_1 = \rho(G_1, \partial G)$ nên suy ra

$$\Delta_j \subset G \quad (\forall j \in J_1).$$

Từ đây suy ra

$$\sum_{j \in J_1} \omega_j.|\Delta_j| \le 2M \sum_{j \in J_1} |\Delta_j| \le 2M\mu^*(G) < 2M\epsilon.$$

Mặt khác, ta có

$$\sum_{j\in J_2} \omega_j.|\Delta_j| \leq \frac{1}{k_0} \sum_{j\in J_2} |\Delta_j| < \epsilon|\Delta|.$$

Vậy ta có

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_j.|\Delta_j| = \sum_{j\in J_1} \omega_j.|\Delta_j| + \sum_{j\in J_2} \omega_j.|\Delta_j| < \epsilon(2M + |\Delta|),$$

với mọi phân hoạch π của Δ mà $d(\pi) < \delta$. Vậy f khả tích (R) trên Δ.

Vậy định lý được chứng minh. □

Định lý 3.31. *Nếu f khả tích Riemann trên gian compact $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ thì f cũng khả tích Lebesgue trên Δ và*

$$(R)\int_{\Delta} f dx = (L)\int_{\Delta} f d\mu. \tag{3.35}$$

Chứng minh. Gọi A là tập các điểm gián đoạn của f. Theo Định lý 3.30 suy ra $\mu(A) = 0$. Do μ là độ đo đủ nên A là tập đo được.

Do f là liên tục trên $\Delta \setminus A$ nên suy ra f đo được trên $\Delta \setminus A$ và do đó f đo được trên Δ.

Do f khả tích Riemann nên nó bị chặn trên Δ. Vậy f là hàm đo được và bị chặn trên Δ nên f khả tích Lebesgue trên Δ.

Bây giờ ta sẽ chứng minh đẳng thức (3.35). Gọi (π_k) là dãy phân hoạch gian Δ

$$\pi_k = \{\Delta_1^{(k)}, \Delta_2^{(k)}, ..., \Delta_{i_k}^{(k)}\},$$

thỏa mãn $d(\pi_k) = 0$ khi $k \to \infty$.

Đặt

$$m_i^{(k)} = \min_{x\in\Delta_i^{(k)}} f(x), \quad M_i^{(k)} = \max_{x\in\Delta_i^{(k)}} f(x), i = 1, 2, ..., i_k.$$

Với mỗi $k \geq 1$, ta đặt

$$g_k = \sum_{j=1}^{i_k} m_j^{(k)} \chi_{\Delta_j^{(k)}} \quad \text{và} \quad h_k = \sum_{j=1}^{i_k} M_j^{(k)} \chi_{\Delta_j^{(k)}}.$$

Khi đó, g_k và h_k là các hàm đơn giản trên Δ và thỏa mãn

$$g_k(x) \leq f(x) \leq h_k(x) \quad (\forall x \in X, \forall k \geq 1).$$

Suy ra

$$(L)\int_\Delta g_k d\mu \leq (L)\int_\Delta f d\mu \leq (L)\int_\Delta h_k d\mu, \quad (\forall k \geq 1).$$

hay tương đương với

$$\sum_{j=1}^{i_k} m_j^{(k)}|\Delta_j^{(k)}| \leq (L)\int_\Delta f d\mu \leq \sum_{j=1}^{i_k} M_j^{(k)}|\Delta_j^{(k)}| \quad (\forall k \geq 1). \tag{3.36}$$

Do f khả tích Riemann nên ta có

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{i_k} m_j^{(k)}|\Delta_j^{(k)}| = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{i_k} M_j^{(k)}|\Delta_j^{(k)}| = (R)\int_\Delta f dx. \tag{3.37}$$

Từ (3.36) và (3.37) ta suy ra (3.35).

Vậy định lý được chứng minh. □

Sau đây là một số ví dụ áp dụng.

Ví dụ 14. Xét hàm Riemann $R : [0,1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỷ} \\ \frac{1}{q} & \text{nếu } x = \frac{p}{q} \text{ là phân số tối giản} \end{cases} \quad (x \in [0,1]).$$

Chứng minh rằng hàm $R(x)$ khả tích Riemann và tính $\int_0^1 R(x)dx$.

Giải:. Cho trước $\epsilon > 0$ và $x_0 \in [0,1]$ là một số vô tỷ. Đặt

$$A = \{\frac{p}{q} \in [0,1] : \frac{1}{q} \geq \epsilon; p,q \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{\frac{p}{q} \in [0,1] : \frac{1}{q} < \epsilon; p,q \in \mathbb{N}\}.$$

□

3.5. Định lý Radon - Nikodym

Giả sử f là hàm khả tích theo độ đo μ và E là tập μ - đo được. Khi đó, hàm tập xác định bởi

$$\lambda(E) = \int_E f(t)d\mu(t)$$

là σ - cộng tính và liên tục tuyệt đối (xem phần Phụ lục) đối với μ. Mục này, ta sẽ chứng minh một kết quả ngược lại, mỗi hàm tập λ là σ - cộng tính hữu hạn và liên tục tuyệt đối đối với μ đều có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\lambda(E) = \int_E f(t)d\mu(t)$$

ở đó, f là hàm khả tích theo độ đo μ. Nội dung này chính là Định lý Radon - Nikodym. Trước hết, ta có bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.32. *Giả sử $(X, \mathcal{F}, \mu)$ là một không gian đo được với μ là độ đo hữu hạn và λ là một độ đo không âm hữu hạn xác định trên $\mathcal{F}$ và thỏa mãn $\lambda \le \mu$. Khi đó, tồn tại duy nhất hàm f đo được thỏa mãn $0 \le f \le 1$ và với mọi $E \in \mathcal{F}$ ta có*

$$\lambda(E) = \int_E f(t) d\mu(t).$$

Hơn nữa, ta có

$$v(\lambda, X) = \int_E |f(t)| d\mu(t).$$

Chứng minh. Xét phiếm hàm tuyến tính T trên không gian Hilbert $L^2(X, d\mu)$ xác định bởi

$$T(\varphi) = \int_X \varphi(t) d\lambda(t).$$

Ta có

$$\begin{aligned} |T(\varphi)| &\le \int_X |\varphi(t)| d\mu(t) \\ &\le \left(\int_X |\varphi(t)|^2 d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= ||\varphi||_{L^2(X, d\mu)} \sqrt{\mu(X)}. \end{aligned}$$

Suy ra T là phiếm hàm tuyến tính bị chặn và do đó nó liên tục. Theo định lý biểu diễn Riesz trong không gian Hilbert, tồn tại $f \in L^2(X, d\mu)$ sao cho

$$T(\varphi) = \int_X \varphi(t) f(t) d\mu(t), \ \forall \varphi \in L^2(X, d\mu).$$

Chọn $\varphi = \chi_E$ (hàm đặc trưng của tập E), ta thu được

$$\lambda(E) = \int_E f(t) d\mu(t).$$

Hơn nữa, với mọi φ là hàm không âm bị chặn ta có

$$0 \le \int_X \varphi(t) f(t) d\mu(t) = \int_X \varphi(t) d\lambda(t) \le \int_X \varphi(t) d\mu(t).$$

Từ đó suy ra $0 \le f \le 1$ trên X.

Vậy bổ đề được chứng minh. $\square$

Định lý 3.33 (Radon - Nikodym). *Giả sử $(X, \mathcal{F}, \mu)$ là một không gian đo được với μ là độ đo σ - hữu hạn và λ là hàm tập σ - cộng tính hữu hạn xác định trên $\mathcal{F}$ và liên tục tuyệt đối đối với μ. Khi đó, tồn tại duy nhất hàm f xác định trên X, khả tích theo μ và thỏa mãn với mọi $E \in \mathcal{F}$ ta có*

$$\lambda(E) = \int_E f(t)d\mu(t).$$

Hơn nữa, ta có

$$v(\lambda, X) = \int_E |f(t)|d\mu(t).$$

Chứng minh. Theo Định lý phân tích hàm tập (xem phần Phụ lục), ta chỉ cần xét trường hợp λ là một độ đo không âm. Hơn nữa, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử λ và μ là các độ đo hữu hạn. Với mỗi $n \geq 1$, ta xét các độ đo sau đây

$$\begin{aligned}
\lambda_n &:= \min(\lambda, n\mu) \\
&= \frac{1}{2}\left(-|n\mu - \lambda| + \lambda + n\mu\right) + \frac{1}{2}\left(-|n\mu - \lambda| + \lambda - n\mu\right) \\
&= n\mu - (n\mu - \lambda) - |n\mu - \lambda| = n\mu - (n\mu - \lambda)^+.
\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh rằng, $\lambda_n(E) \nearrow \lambda(E)$ khi $n \to \infty$, với mọi $E \in \mathcal{F}$.

Thật vậy: Áp dụng Định lý Hahn (xem phần Phụ lục) cho độ đo $(n\mu - \lambda)$ ta tìm được các tập

$$A_n, B_n = X \setminus A_n \in \mathcal{F}$$

sao cho $(n\mu - \lambda)^+$ bằng $(n\mu - \lambda)$ hạn chế lên A_n và $(n\mu - \lambda)^-$ bằng $(n\mu - \lambda)$ hạn chế lên B_n. Do $(n\mu - \lambda)$ là dãy tăng nên suy ra $(n\mu - \lambda)^+$ cũng là dãy tăng và do đó A_n cũng là dãy tăng.

Đặt

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \quad \text{và} \quad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}.$$

Ta có

$$X \setminus A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B,$$

và với mọi $E \in \mathcal{F}$ ta có

$$\begin{aligned}\lambda_n(E) &= \lambda_n(E \cap A_n) + \lambda_n(E \cap B_n)\\ &= \lambda(E \cap A_n) + n\mu(E \cap B_n)\\ &\geq \lambda(E \cap A_n) + n\mu(E \cap B).\end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$ ta thu được

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(E) \geq \lambda(E \cap A) + \lim_{n\to\infty} n\mu(E \cap B).$$

Ta xét các trường hợp sau đây:

• Nếu $\mu(E \cap B) > 0$ thì $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(E) \geq \infty \geq \lambda(E)$.

• Nếu $\mu(E \cap B) = 0$ thì do λ là liên tục tuyệt đối đối với μ nên suy ra $\lambda(E \cap B) = 0$. Do đó ta có

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(E) \geq \lambda(E \cap A) = \lambda(E).$$

Vậy $\lambda_n(E) \nearrow \lambda(E)$ khi $n \to \infty$, với mọi $E \in \mathcal{F}$.

Theo Bổ đề 3.32, tồn tại một dãy tăng các hàm đo được f_n sao cho $0 \leq f_n \leq 1$ và ta có biển diễn sau

$$\lambda_n(E) = \int_E f_n(t)d\mu(t), \quad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Gọi f là giới hạn của dãy hàm f_n. Khi đó, f là hàm đo được và theo định lý hội tụ đơn điệu của tích phân Lebesgue ta suy ra

$$\lambda(E) = \int_E f(t)d\mu(t) \quad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Vậy định lý được chứng minh. □

3.6. Tích phân trên không gian tích và định lý Fubini

3.6.1. Họ đơn điệu các tập hợp

Định nghĩa 3.34. Cho X là một tập hợp tùy ý. Một họ $\mathcal{C}$ các tập con của X được gọi là họ đơn điệu nếu mọi dãy $(A_k) \subset \mathcal{C}$ đơn điệu tăng:

$$A_1 \subset A_2 \subset ...$$

hoặc đơn điệu giảm:

$$A_1 \supset A_2 \supset ...$$

ta có

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{C} \ \text{ hoặc } \ \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{C}.$$

Ví dụ 15. Nếu $\mathcal{F}$ là một σ - đại số trên tập X thì $\mathcal{F}$ là một họ đơn điệu. Đặc biệt, $\mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$ và σ - đại số tất cả các tập con $\mathcal{P}(X)$ của X là các họ đơn điệu trên X.

Ta có thể kiểm tra rằng có các nhận xét sau đây.

Nhận xét 3.35. (a) Nếu $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ là một họ các họ đơn điệu thì

$$\mathcal{C} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{C}_i$$

cũng là một họ đơn điệu.

(b) Cho $\mathcal{S}$ là một họ các tập con bất kỳ của X. Khi đó, tồn tại một họ đơn điệu nhỏ nhất $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ chứa $\mathcal{S}$. Đó chính là giao của tất cả các họ đơn điệu chứa $\mathcal{S}$. Ta gọi $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ là họ đơn điệu sinh bởi $\mathcal{S}$.

Định lý 3.36. *Nếu $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp và đồng thời là một họ đơn điệu trên X thì $\mathcal{E}$ là một σ - đại số trên X.*

Chứng minh. Lấy $(A_i)_{i=1,2,\dots}$ là một dãy các tập con trong $\mathcal{E}$. Với mỗi $j \geq 1$ ta đặt

$$B_j = \bigcup_{i=1}^{j} A_i.$$

Khi đó ta có thể kiểm tra các tính chất sau đây của dãy (B_j):

i) $B_j \in \mathcal{E}$ với mọi $j \geq 1$;

ii) Dãy (B_j) là một họ đơn điệu tăng;

iii) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$.

Do $\mathcal{E}$ là họ đơn điệu nên ta có

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{E}.$$

Vậy $\mathcal{E}$ là một σ - đại số trên X.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Cho $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X. Như ta đã biết, $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ là σ - đại số sinh bởi $\mathcal{E}$, tức là giao của tất cả σ - đại số chứa $\mathcal{E}$ (Nhận xét 1.11). Kết quả sau đây cho mối quan hệ giữa $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ và $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

Định lý 3.37. *Nếu $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X thì $\mathcal{C}(\mathcal{E}) = \mathcal{F}(\mathcal{E})$.*

Chứng minh. Trước hết, do $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ là một σ - đại số nên nó cũng là một họ đơn điệu. Suy ra $\mathcal{C}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{E})$.

Bây giờ chỉ còn phải chứng minh $\mathcal{F}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$. Để chứng minh bao hàm thức này, ta chỉ cần chỉ ra rằng, $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ là một σ - đại số. Do $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ là một họ đơn điệu, nên bởi Định lý 3.36, ta chỉ cần chỉ ra rằng $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ là một đại số tập hợp.

Với mỗi $A \subset X$, ta đặt $\mathcal{K}(A)$ là họ các tập con B của X thỏa mãn:

$$A \setminus B \in \mathcal{C}(\mathcal{E}), B \setminus A \in \mathcal{C}(\mathcal{E}), A \cup B \in \mathcal{C}(\mathcal{E}).$$

Do tính đối xứng của A và B nên ta có

$$A \in \mathcal{K}(B) \Leftrightarrow B \in \mathcal{K}(A).$$

Giả sử (A_k) là một dãy đơn điệu tăng hoặc giảm trong $\mathcal{K}(B)$. Do $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ là họ đơn đơn điệu nên nếu (A_k) là dãy tăng thì

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \setminus B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_n \setminus B) \in \mathcal{C}(\mathcal{E});$$

$$B \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} (B \setminus A_n) \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$$

và nếu (A_k) là dãy đơn điệu giảm thì

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \setminus B = \bigcap_{k=1}^{\infty} (A_n \setminus B) \in \mathcal{C}(\mathcal{E});$$

$$B \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (B \setminus A_n) \in \mathcal{C}(\mathcal{E}).$$

Từ đây suy ra $\mathcal{K}(B)$ là họ đơn điệu với mọi $B \subset X$.

Mặt khác, do $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp nên $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}(B)$ với mọi $B \in \mathcal{E}$. Từ đây suy ra

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{K}(B), \quad (\forall B \in \mathcal{E}).$$

Từ đây và bởi tính đối xứng ta suy ra

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{K}(B), \quad (\forall B \in \mathcal{C}(\mathcal{E})).$$

Từ kết quả này và bởi $\mathcal{K}(B)$ là họ đơn điệu chưa $\mathcal{E}$ với $B \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ suy ra

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{K}(B), \quad (B \in \mathcal{C}(\mathcal{E})).$$

Như vậy, nếu $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ thì $A \in \mathcal{K}(B)$ và do đó suy ra

$$A \setminus B \in \mathcal{C}(\mathcal{E}), B \setminus A \in \mathcal{C}(\mathcal{E}), A \cup B \in \mathcal{C}(\mathcal{E}).$$

Tức là, $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ là đại số tập hợp. Và do đó định lý được chứng minh.

Vậy định lý được chứng minh. □

3.6.2. Độ đo trên không gian tích

Cho $(X, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ và $(Y, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ là hai không gian đo được với μ_1, μ_2 là các độ đo σ - hữu hạn. Ta ký hiệu $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ là σ - đại số trên không gian tích $X \times Y$ sinh bởi họ các tập $A \times B$ với $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$. Mục tiêu của mục này là xây dựng độ đo trên $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ dựa vào các độ đo μ_1, μ_2.

Cho $E \subset X \times Y$. Với mọi $x \in X$ và $y \in Y$, ta đặt

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\} \quad \text{và} \quad E_y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Ta gọi các tập E_x, E_y lần lượt là các thiết diện qua x và y của E.

Định lý 3.38. *Giả sử $(X, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ và $(Y, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ là hai không gian đo được với μ_1, μ_2 là các độ đo σ - hữu hạn. Nếu $E \in \mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ thì*

$$E_x \in \mathcal{F}_1, \forall x \in X \qquad \text{và} \qquad E_y \in \mathcal{F}_2, \forall y \in Y. \tag{3.38}$$

Chứng minh. Ta gọi $\mathcal{K}$ là họ các tập con của $X \times Y$ thỏa mãn điều kiện (3.38). Ta sẽ chứng minh $\mathcal{K}$ là một σ - trên $X \times Y$. Thật vậy:

- Với mọi $x \in X$ và $y \in Y$, ta có

$$\emptyset_x = \{y \in Y : (x, y) \in \emptyset\} = \emptyset \in \mathcal{F}_2$$
$$\emptyset_y = \{x \in X : (x, y) \in \emptyset\} = \emptyset \in \mathcal{F}_1.$$

Suy ra $\emptyset \in \mathcal{K}$.

- Giả sử $E \in \mathcal{K}$. Với mọi $x \in X$ và $y \in Y$ ta có

$$\begin{aligned} CE_x &= \{y \in Y : (x, y) \in CE\} \\ &= Y \setminus \{y \in Y : (x, y) \in E\} \in \mathcal{F}_2 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} CE_y &= \{x \in X : (x, y) \in CE\} \\ &= X \setminus \{x \in X : (x, y) \in E\} \in \mathcal{F}_1. \end{aligned}$$

Suy ra $CE \in \mathcal{K}$.

• Giả sử $(E_n) \subset \mathcal{K}$. Đặt

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Với mọi $x \in X$ và $y \in Y$ ta có

$$\begin{aligned} E_x &= \{y \in Y : (x,y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{y \in Y : (x,y) \in E_n\} \in \mathcal{F}_2 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} E_y &= \{x \in X : (x,y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : (x,y) \in E_n\} \in \mathcal{F}_1. \end{aligned}$$

Suy ra $E \in \mathcal{K}$. Vậy $\mathcal{K}$ là một σ - đại số trên $X \times Y$.

Mặt khác, nếu $E = A \times B$ với $A \in \mathcal{F}_1$ và $B \in \mathcal{F}_2$ thì với mọi $x \in X$ và $y \in Y$ ta có

$$E_x = \begin{cases} B & \text{với } x \in A \\ \emptyset & \text{với } x \notin A \end{cases} \quad \text{và} \quad E_y = \begin{cases} A & \text{với } y \in B \\ \emptyset & \text{với } y \notin B. \end{cases}$$

Vì vậy $A \times B \in \mathcal{K}$. Từ đây suy ra $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \subset \mathcal{K}$.

Vậy định lý được chứng minh. □

Định lý 3.39. *Giả sử $(X, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ và $(Y, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ là hai không gian đo được với μ_1, μ_2 là các độ đo σ - hữu hạn. Khi đó, với mỗi tập $E \in \mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, các hàm*

$$f : x \mapsto \mu_2(E_x) \quad \text{và} \quad g : y \mapsto \mu_1(E_y)$$

lần lượt đo được trên X và trên Y. Hơn nữa ta có

$$\int_X f(x) d\mu_1 = \int_Y g(y) d\mu_2.$$

Chứng minh. • **Trường hợp μ_1, μ_2 là các độ đo hữu hạn:**

- Nếu $E = A \times B$ với $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$ thì ta có

$$f(x) = \mu_2(E_x) = \mu_2(B)\chi_A \quad \text{và} \quad g(y) = \mu_1(E_y) = \mu_1(A)\chi_B.$$

Từ đấy suy ra f, g là các hàm đo được trên X và Y. Hơn nữa ta có

$$\int_X f(x)d\mu_1 = \int_Y g(y)d\mu_2 = \mu_1(A)\mu_2(B).$$

- Gọi $\mathcal{E}$ là họ các tập con của $X \times Y$ có thể biểu diễn được dưới dạng hợp rời nhau của hữu hạn các tập có dạng $A \times B$ với $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$. Khi đó, ta có

$$C(A \times B) = (CA \times Y) \cup (A \times CB) \in \mathcal{E}.$$

Do đó, có thể kiểm tra rằng $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên $X \times Y$ (bạn đọc kiểm tra chi tiết hơn).

Bây giờ ta kiểm tra rằng, họ $\mathcal{E}$ thỏa mãn định lý. Thật vậy: Giả sử

$$E = \bigcup_{k=1}^{n}(A_k \times B_k) \in \mathcal{E}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
E_x &= \{y \in Y : (x, y) \in \bigcup_{k=1}^{n}(A_k \times B_k)\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{n}\{y \in Y : (x, y) \in A_k \times B_k\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{n}\begin{cases} B_k & \text{nếu } x \in A_k \\ \emptyset & \text{nếu } x \notin A_k \end{cases} \\
&= \begin{cases} \bigcup_{k=1}^{n} B_k & \text{nếu } x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k \\ \emptyset & \text{nếu } x \notin \bigcup_{k=1}^{n} A_k. \end{cases}
\end{aligned}$$

Suy ra

$$f(x) = \mu_2(E_x) = \mu_2\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)\chi_{\cup_{k=1}^{n} A_k}.$$

Từ đây suy ra f là hàm đo được trên X.

Tương tự ta có

$$g(y) = \mu_1(E_y) = \mu_1\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\chi_{\cup_{k=1}^{n} B_k}.$$

Và do đó g cũng là hàm đo được trên Y. Hơn nữa

$$\int_X f(x)d\mu_1 = \int_Y g(y)d\mu_2 = \mu_1\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right).\mu_2\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right).$$

- Ta gọi $\mathcal{K}$ là họ các tập thuộc $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ và thỏa mãn định lý. Ta sẽ chứng minh $\mathcal{K} = \mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. Thật vậy: Ta chỉ cần chứng minh $\mathcal{K}$ là một σ - đại số. Do $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ và $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp nên bởi Định lý 3.37, ta chỉ cần chứng minh $\mathcal{K}$ là một họ đơn điệu.

Gọi (E^n) là một dãy đơn điệu (tăng hoặc giảm) trong $\mathcal{K}$. Đặt

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E^n \quad \text{hoặc} \quad E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E^n.$$

Khi đó với mọi $x \in X, y \in Y$ ta có

$$E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_x^n \quad \text{và} \quad E_y = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_y^n.$$

Với mỗi $n \geq 1$ ta đặt

$$f_n(x) = \mu_2(E_x^n),\ \forall x \in X \quad \text{và} \quad g_n(y) = \mu_1(E_y^n),\ \forall y \in Y.$$

Khi đó, (f_n) và (g_n) là các dãy hàm đơn điệu hội tụ tới lần lượt các hàm sau

$$f(x) = \mu_2(E_x) \quad \text{và} \quad g(y) = \mu_1(E_y).$$

Mặt khác ta có

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in X, n \geq 1\} = \sup\{\mu_2(E_x^n) : x \in X, n \geq 1\} \leq \mu_2(Y) < \infty$$

và

$$\sup\{|g_n(y)| : y \in Y, n \geq 1\} = \sup\{\mu_1(E_y^n) : y \in Y, n \geq 1\} \leq \mu_1(X) < \infty.$$

Từ hệ thức

$$\int_X f_n(x)d\mu_1 = \int_Y g_n(y)d\mu_2 \quad (\forall n \geq 1)$$

và áp dụng Định lý Lebesgue về hội tụ bị chặn (Định lý 3.28) ta có

$$\begin{aligned}
\int_X f(x)d\mu_1 &= \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) d\mu_1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu_1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_Y g_n(y)d\mu_2 \\
&= \int_Y \left(\lim_{n\to\infty} g_n(x)\right) d\mu_2 \\
&= \int_Y g(y)d\mu_2.
\end{aligned}$$

Vậy ta có $E \in \mathcal{K}$, tức là $\mathcal{K}$ là một họ đơn điệu.

• **Trường hợp** μ_1, μ_2 **là** σ **- hữu hạn:** Ta có thể biểu diễn X, Y như sau

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i,\ X_i \in \mathcal{F}_1, \mu_1(X_i) < \infty, X_i \cap X_j = \emptyset,\ \forall i \neq j$$

$$Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j,\ Y_j \in \mathcal{F}_2, \mu_2(Y_j) < \infty, Y_i \cap Y_j = \emptyset,\ \forall i \neq j.$$

Khi đó, $(X_i \times Y_j)$ là một dãy các tập trong $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ rời nhau từng đôi một và

$$X \times Y = \bigcup_{i,j\geq 1} (X_i \times Y_j).$$

Lấy $E \in \mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. Đặt

$$E^{ij} = E \cap (X_i \times Y_j),\ \forall i, j \geq 1$$

Khi đó ta có $E = \cup_{i,j\geq 1} E^{ij}$ và do đó

$$E_x = \bigcup_{i,j\geq 1} E_x^{ij} \quad (\forall x \in X) \quad \text{và} \quad E_y = \bigcup_{i,j\geq 1} E_y^{ij} \quad (\forall y \in Y).$$

Suy ra

$$f(x) = \mu_2(E_x) = \mu_2\left(\bigcup_{i,j\geq 1} E_x^{ij}\right) = \sum_{i,j\geq 1} \mu_2(E_x^{ij})$$

và

$$g(y) = \mu_1(E_y) = \mu_1\left(\bigcup_{i,j\geq 1} E_y^{ij}\right) = \sum_{i,j\geq 1} \mu_1(E_y^{ij}).$$

Theo trường hợp trên thì các hàm

$$x \mapsto \mu_2(E_x^{ij}) \quad \text{và} \quad y \mapsto \mu_1(E_y^{ij})$$

là các hàm đo được và thỏa mãn

$$\int_{X_i} \mu_2(E_x^{ij}) d\mu_1 = \int_{Y_j} \mu_1(E_y^{ij}) d\mu_2.$$

Hay tương đương với

$$\int_{X_i} \mu_2(E_x \cap Y_j) = \int_{Y_j} \mu_1(E_y \cap X_i) d\mu_2.$$

Từ đây suy ra f và g là các hàm đo được trên X và Y. Hơn nữa, áp dụng trường hợp trên ta có

$$\begin{aligned}
\int_X f(x) d\mu_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} \sum_{i,j \geq 1} \mu_2(E_x^{ij}) d\mu_1 = \sum_{i,j \geq 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} \mu_2(E_x^{ij}) d\mu_1 \right) \\
&= \sum_{i,j \geq 1} \int_{X_i} \mu_2(E_x \cap Y_j) d\mu_1 = \sum_{i,j \geq 1} \int_{Y_j} \mu_1(E_y \cap X_i) d\mu_2 \\
&= \sum_{i,j \geq 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{Y_k} \mu_1(E_y^{ij}) d\mu_2 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Y_k} \sum_{i,j \geq 1} \mu_1(E_y^{ij}) d\mu_2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Y_k} g(y) d\mu_2 = \int_Y g(y) d\mu_2.
\end{aligned}$$

Vậy định lý được chứng minh. □

Kết quả sau đây cho ta công thức độ đo trên $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ như mục tiêu đầu mục đặt ra.

Định lý 3.40. *Hàm tập $\mu : \mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ xác định bởi*

$$\mu(E) := \int_X \mu_2(E_x) d\mu_1 = \int_Y \mu_1(E_y) d\mu_2 \quad (E \in \mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)), \tag{3.39}$$

là một độ đo σ - hữu hạn trên $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$) thỏa mãn

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B) \quad (A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2). \tag{3.40}$$

Chứng minh. Trước hết, đẳng thức trong công thức (3.39) được suy ra từ Định lý 3.39.

- Giả sử $E = A \times B$ với $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$. Khi đó

$$\mu(A \times B) = \int_X \mu_2(E_x) d\mu_1 = \int_X \mu_2(B)\chi_A(x) d\mu_1 = \mu_1(A)\mu_2(B).$$

Vậy công thức (3.40) được thỏa mãn.

• Ta chứng minh μ là hàm tập σ - hữu hạn. Thật vậy: Do μ_1, μ_2 là các độ đo σ - hữu hạn nên ta có thể biểu diễn X, Y như sau

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i,\ X_i \in \mathcal{F}_1, \mu_1(X_i) < \infty, X_i \cap X_j = \emptyset,\ \forall i \neq j$$

$$Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j,\ Y_j \in \mathcal{F}_2, \mu_2(Y_j) < \infty, Y_i \cap Y_j = \emptyset,\ \forall i \neq j.$$

Khi đó, $(X_i \times Y_j)$ là một dãy các tập trong $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ rời nhau từng đôi một và

$$X \times Y = \bigcup_{i,j \geq 1} (X_i \times Y_j).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\mu(X_i \times Y_j) &= \int_X \mu_2 \left[(X_i \times Y_j)_x\right] d\mu_1 \\
&= \int_X \mu_2(Y_j) \chi_{X_i}(x) d\mu_1 \\
&= \mu_1(X_i)\mu_2(Y_j) < \infty.
\end{aligned}$$

Vậy μ là σ - hữu hạn.

• Để chứng minh μ là một độ đo ta còn phải chỉ ra rằng μ là σ - cộng tính.

Giả sử $(E^i) \subset \mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ sao cho $E^i \cap E^j = \emptyset$ với mọi $i \neq j$. Đặt

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E^i \quad \text{và} \quad F^n = \bigcup_{i=1}^{n} E^i,\ (n \geq 1).$$

Khi đó, (F^n) là dãy tăng tới tập E.

Với mọi $x \in X, y \in Y$ ta có

$$F^n_x = \bigcup_{i=1}^{n} E^i_x \quad \text{và} \quad F^n_y = \bigcup_{i=1}^{n} E^i_y$$

$$E_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} E^i_x \quad \text{và} \quad E_y = \bigcup_{i=1}^{\infty} E^i_y.$$

Từ đây suy ra các dãy tập hợp (F^n_x) và F^n_y đơn điệu tăng lần lượt tới các tập E_x và E_y.

Ta có

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E^i\right) = \int_X \mu_2\left(\bigcup_{i=1}^{n} E^i_x\right) d\mu_1 = \sum_{i=1}^{n}\int_X \mu_2\left(E^i_x\right) d\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(E^i\right).$$

Vậy μ là hàm tập cộng tính.

Mặt khác, nếu đặt

$$f_n(x) = \mu_2(F^n_x) = \mu_2\left(\bigcup_{i=1}^{n} E^i_x\right)$$

thì (f_n) là dãy các hàm đo được không âm và đơn điệu tăng. Áp dụng Định lý Lebesgue về hội tụ đơn điệu ta có

$$\begin{aligned}
\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E^i\right) &= \int_X \mu_2(E_x) d\mu_1 \\
&= \int_X \left(\lim_{n\to\infty} \mu_2(F^n_x)\right) d\mu_1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \mu_2(F^n_x) d\mu_1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \mu_2(\bigcup_{i=1}^{n} E^i_x) d\mu_1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_X \mu_2(E^i_x) d\mu_1 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E^i).
\end{aligned}$$

Vậy hàm tập μ là σ - cộng tính.

Vậy định lý được chứng minh. □

Định nghĩa 3.41. Độ đo μ xác định như trong Định lý 3.40 được gọi là tích của các độ đo μ_1 và μ_2. Ký hiệu là

$$\mu = \mu_1 \times \mu_2.$$

Hệ quả 3.42. *Giả sử $E \in \mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. Khi đó, ba mệnh đề sau là tương đương:*

i) $(\mu_1 \times \mu_2)(E) = 0$.

ii) $\mu_2(E_x) = 0,\ \mu_1-$ hầu khắp nơi.

iii) $\mu_1(E_y) = 0,\ \mu_2 -$ hầu khắp nơi.

Chứng minh. Suy trực tiếp từ Định lý 3.40. $\square$

3.6.3. Định lý Fubini

Trước khi phát biểu và chứng minh định lý Fubini, ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 3.43. Giả sử $(X, \mathcal{F}_X, \mu)$ và $(Y, \mathcal{F}_Y, \nu)$ là các không gian đo được với μ, ν là các độ đo σ - hữu hạn. Xét hàm $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Ta nói hàm f là:

i) ν - khả tích, μ - hầu khắp nơi nếu tồn tại $A \subset X$ với $\mu(A) = 0$ sao cho hàm

$$y \mapsto f(x, y)$$

là ν - khả tích với mọi $x \in X \setminus A$.

ii) μ - khả tích, ν - hầu khắp nơi nếu tồn tại $B \subset Y$ với $\nu(B) = 0$ sao cho hàm

$$x \mapsto f(x, y)$$

là μ - khả tích với mọi $y \in Y \setminus B$.

Định lý 3.44 (Định lý Fubini). *Giả sử $(X, \mathcal{F}_X, \mu)$ và $(Y, \mathcal{F}_Y, \nu)$ là các không gian đo được với μ, ν là các độ đo σ - hữu hạn. Giả sử hàm $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ là khả tích theo độ đo $\lambda = \mu \times \nu$. Khi đó ta có các mệnh đề sau đây:*

i) Hàm $f(x, .) : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ là ν - khả tích, μ - hầu khắp nơi.

ii) Hàm $f(., y) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là μ - khả tích, ν - hầu khắp nơi.

iii) Các hàm sau

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \quad \text{và} \quad y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

lần lượt là μ - khả tích và ν - khả tích. Hơn nữa ta có

$$\begin{aligned} \iint_{X \times Y} f(x, y) d\lambda(x, y) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned}$$

Chứng minh. Với mọi $E \subset X \times Y$, bởi Định lý 3.38, ta có các khẳng định sau

$$E_x \in \mathcal{F}_y, E_y \in \mathcal{F}_X$$

Suy ra các hàm $f(x,.), f(.,y)$ là đo được theo ν và μ.

• Ta có thể kiểm tra rằng định lý đúng khi f là hàm đơn giản đo được.

• Giả sử f là hàm khả tích không âm. Khi đó, f là giới hạn của dãy tăng các hàm đo được, không âm f_n. ta có

$$\left(\int_Y f_n(x,y)d\nu(y)\right)$$

là dãy tăng các hàm μ - đo được trên X. Theo Định lý Lebesgue về hội tụ đơn điệu ta có hàm xác định bởi

$$\int_Y f(x,y)d\nu(y) = \lim_{n\to\infty}\int_Y f_n(x,y)d\nu(y)$$

là μ - đo được trên X. Tiếp tục áp dụng Định lý Lebesgue về hội tụ đơn điệu ta có

$$\begin{aligned}\iint_{X\times Y} f(x,y)d\lambda(x,y) &= \lim_{n\to\infty}\iint_{X\times Y} f_n(x,y)d\lambda(x,y)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_X\left(\int_Y f_n(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)\\ &= \int_X\left(\lim_{n\to\infty}\int_Y f_n(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)\\ &= \int_X\left(\int_Y \lim_{n\to\infty} f_n(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)\\ &= \int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x).\end{aligned}$$

Đẳng thức trên chứng tỏ hàm $x\mapsto \int_Y f(x.y)d\nu(y)$ là μ - khả tích và do đó hàm $f(x,.) : Y\to\overline{\mathbb{R}}$ là ν - khả tích, μ - hầu khắp nơi.

• Giả sử f là hàm λ - khả tích bất kỳ. Khi đó, ta viết $f = f^+ - f^-$, với f^+, f^- là các hàm λ - khả tích, không âm. Áp dụng trường hợp trên ta suy ra hàm $f(x,.) = f^+(x,.) - f^-(x,.)$ là ν - khả tích, μ - hầu khắp nơi. Hơn nữa ta có

$$x\mapsto \int_T f(x,y)d\nu(y) = \int_T \left(f^+(x,y) - f^-(x,y)\right)d\nu(y)$$

là μ - khả tích.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài 3.1. Chứng minh rằng, nếu f là hàm khả tích (L) trên A thì

$$\lim_{n\to\infty} n\mu(A_n) = 0,$$

với $A_n = \{x \in A : |f(x)| \geq n\}$.

Bài 3.2. Chứng minh rằng, nếu hàm f khả tích (L) trên A thì với mọi $\epsilon > 0$ ta có

$$\mu(\{x \in A : |f(x)| > \epsilon\}) < +\infty.$$

Bài 3.3. Giả sử f, g là các hàm khả tích (L) trên A và $a \leq f(x) \leq b$ hầu khắp nơi trên A. Chứng minh rằng, tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_A f|g|d\mu = c\int_A |g|d\mu.$$

Bài 3.4. Các mệnh đề sau đúng hay sai?
a) Nếu hàm f khả tích (L) trên A thì $|f|$ cũng khả tích (L) trên A.
b) Nếu hàm $|f|$ khả tích (L) trên A thì f cũng khả tích L trên A.
c) Nếu hàm f khả tích (L) trên A thì $\frac{1}{f}$ cũng khả tích L trên A.

Bài 3.5. Cho A là tập đo được có độ đo hữu hạn và f là hàm đo được không âm trên A. Khi đó, f khả tích (L) trên A nếu và chỉ nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ hội tụ, với

$$B_n = \{x \in A : n \leq f(x) < n + 1\}.$$

Bài 3.6. Cho f là hàm đo được không âm trên A. Chứng minh rằng, các mệnh đề sau là tương đương
a) f khả tích (L) trên A.
b) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(B_n)$ hội tụ.
c) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(A_n)$ hội tụ.
Ở đây

$$B_n = \{x \in A : n \leq f(x) < n + 1\}, \quad A_n = \{x \in A : f(x) \geq n\}.$$

Bài 3.7. Xét hàm số sau

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + x & \text{nếu } x \text{ là số vô tỷ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỷ.} \end{cases}$$

Xét tính khả tích (R) và khả tích (L) của hàm f trên đoạn $[0,1]$ và hãy tính các tích phân này trong trường hợp nó tồn tại.

Bài 3.8. Xét hàm số sau

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + x^2 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỷ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỷ.} \end{cases}$$

Xét tính khả tích (R) và khả tích (L) của hàm f trên đoạn $[0,1]$ và hãy tính các tích phân này trong trường hợp nó tồn tại.

Bài 3.9. Cho C là tập Cantor. Xét hàm số $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ xác định như sau

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin x & \text{nếu } x \in C \\ 0 & \text{nếu } x \in [0,1] \setminus C. \end{cases}$$

Xét tính khả tích (R) và khả tích (L) của hàm f trên đoạn $[0,1]$ và hãy tính các tích phân này trong trường hợp nó tồn tại.

Bài 3.10. Xét hàm số $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ xác định như sau

$$f(x) = \begin{cases} a_n & \text{nếu } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \ (n = 1, 2, 3...) \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Hãy xét tính khả tích (R) của hàm f trên đoạn $[0,1]$ trong các trường hợp sau đây:

a) $a_n = n, n = 1, 2, 3, ...$

b) $a_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, ...$

c) $a_n = \frac{n+1}{\ln^2 n}, n = 1, 2, 3, ...$

Bài 3.11. Hãy cho ví dụ về một hàm số khả tích (R) trên mọi đoạn $[\alpha, \beta]$ với mọi $a < \alpha < \beta < b$ nhưng không khả tích (R) trên đoạn $[a, b]$.

Bài 3.12. Xét hàm số $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

i) f khả tích trên mọi đoạn $[\alpha, \beta]$ với $a < \alpha < \beta < b$;

ii) f bị chặn trên đoạn $[a, b]$.

Chứng minh rằng, hàm f khả tích (R) trên đoạn $[a, b]$.

Bài 3.13. Giả sử dãy hàm (f_n) gồm các hàm số khả tích (R) trên đoạn $[a, b]$. Chứng minh rằng, nếu dãy (f_n) hội tụ đều trên đoạn $[a, b]$ đến hàm f thì f cũng khả tích (R) trên $[a, b]$ và

$$(R)\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} (R)\int_a^b f_n(x)dx.$$

Bài 3.14. Chứng minh rằng, nếu f khả tích (R) trên đoạn $[0, 1]$ thì

$$\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}dx = 0.$$

Bài 3.15. Chứng minh rằng

a) $\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0.$

b) $\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = 0.$

Bài 3.16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0, +\infty)$ và thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 1$. Hãy tính

$$\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1 f(nx)dx.$$

Bài 3.17. Xét tính khả tích (L) của các hàm số sau trên các đoạn đã chỉ ra

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}},\ x \in [0, 1)$.

b) $f(x) = \frac{1}{x^2},\ x \in (0, 1]$.

c) $f(x) = \frac{\sin x}{x},\ x \in [1, +\infty)$.

Bài 3.18. Cho hàm số $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ xác định như sau

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = 0 \\ c_n & \text{nếu } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, (n = 1, 2, 3, ...). \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng, nếu tồn tại $\alpha \in (0, 1)$ sao cho

$$\sup_n \left|\frac{c_n}{n^\alpha}\right| < +\infty$$

thì hàm f khả tích (L) trên đoạn $[0, 1]$.

b) Xét tính khả tích (L) của hàm f trên đoạn $[0, 1]$ trong trường hợp $c_n = n, n = 1, 2, 3, ...$

Bài 3.19. Xét tính khả tích (L) của hàm số sau trên khoảng $(, 1)$

$$f(x) = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

Bài 3.20. Cho hàm số $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỷ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỷ}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng, f khả tích (L) và tính

$$(L)\int_{[0,1]\times[0,1]} f d\mu.$$

Bài 3.21. Cho D là miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = x, y = 0, x = 1$ và hàm f xác định trên D bởi công thức sau đây

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos xy}{x^3} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Xét tính khả tích (L) của hàm f trên D và tính tích phân đó nếu nó tồn tại.

Chương 4

MỐI LIÊN HỆ GIỮA TÍCH PHÂN VÀ ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TRÊN $\mathbb{R}$

Chương này được dành để trình bày một số kết quả về mối liên hệ giữa tính khả vi và tính đơn điệu, tính khả vi của tích phân theo cận trên. Ngoài ra, một số khái niệm và tính chất liên quan tới hàm có biến phân bị chặn, hàm tuyệt đối liên tục, tích phân Lebesgue - Stieljets, tích phân Riemann - Stieljeets cũng được đề cập trong chương này.

4.1. Tính khả vi của hàm đơn điệu

Bổ đề 4.1. *Cho $A \subset (a, b) \subset \mathbb{R}$ và $\mathcal{F}$ là họ các khoảng sao cho mọi $x \in A$ là đầu mút trái của một khoảng nào đó thuộc họ $\mathcal{F}$. Khi đó, với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại một số hữu hạn các khoảng $\Delta_1, ..., \Delta_p \in \mathcal{F}$ rời nhau sao cho*

$$\mu^* \left(A \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{p} \Delta_i \right) \right) > \mu^*(A) - \epsilon.$$

Chứng minh. Với mỗi $n \geq 1$, đặt

$$A_n = \{x \in A : \exists \Delta \in \mathcal{F} \text{ sao cho } x \text{ là đầu mút trái của } \Delta \text{ và } |\Delta| > \frac{1}{n}\},$$

ở đây $|\Delta|$ là độ dài của khoảng Δ. Khi đó, ta có

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{và} \quad A_n \subset A_{n+1}, \ \forall n \geq 1.$$

Theo định nghĩa của độ đo ngoài, với mỗi $n \geq 1$ ta tìm được tập mở G_n sao cho

$$A_n \subset G_n \ \text{ và } \ \mu^*(G_n) < \mu^*(A_n) + \delta_n,$$

ở đây (δ_n) là dãy dương và $\delta_n \searrow 0$. Đặt

$$E_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} G_k \quad \text{và} \quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_n.$$

Khi đó, E_n, E là các tập đo được và $E_n \subset E_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó suy ra

$$\mu^*(E) = \lim_{n \to \infty} \mu^*(E_n).$$

Mặt khác, vì $A_n \subset E_n \subset G_n$ nên ta có

$$\mu^*(A_n) \leq \mu^*(E_n) \leq \mu^*(G_n) \leq \mu^*(A_n) + \delta_n.$$

Cho $n \to \infty$ ta nhận được

$$\mu^*(A) \geq \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n) = \mu^*(E).$$

Mặt khác, do $A \subset E_n$ nên ta có

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(E).$$

Vậy ta có

$$\mu^*(A) = \mu^*(E).$$

Từ đây suy ra, nếu chọn n đủ lớn ta sẽ có

$$\mu^*(A_n) \geq \mu^*(A) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Đặt

$$a_1 = \inf A_n, b_1 = \sup A_n \ \text{ và } \ l = b_1 - a_1.$$

Giả sử $\delta = \frac{\epsilon}{2(nl+1)}$. Chọn $x_1 \in A_n, a_1 \leq x_1 \leq a_1 + \delta$. Theo định nghĩa của A_n, tồn tại một khoảng $(x_1, x_1 + h_1) \in \mathcal{F}$ với $h_1 > \frac{1}{n}$.

Nếu bên phải $x_1 + h_1$ còn có những điểm của A_n thì xét cận dưới đúng a_2 của chúng và chọn $x_2 \in A_n, a_2 \leq x_2 \leq a_2 + \delta$ và khoảng $(x_2, x_2 + h_2) \in \mathcal{F}$ với $h_2 > \frac{1}{n}$.

Tiếp tục quá trình như trên, ta sẽ tìm được khoảng $(x_p, x_p + h_p) \in \mathcal{F}$ với $x_p \in A_n, h_p > \frac{1}{n}$ sao cho bên phải của $x_p + h_p$ không có điểm nào của A_n. Có thể thấy rằng $p \leq nl + 1$.

Đặt

$$\Delta_i = (x_i, x_i + h_i),\ 1 \leq i \leq p \ \text{ và } \ B = A_n \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{p} \Delta_i \right).$$

Vì

$$A_n \setminus B \subset \bigcup_{i=1}^{p} [x_i - \delta, x_i]$$

nên ta có

$$\mu^*(A_n \setminus B) \leq p\delta < (nl+1).\frac{\epsilon}{2(nl+1)} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Từ đây suy ra

$$\mu^*(A_n) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A_n \setminus B) < \mu^*(B) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Vậy ta có

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(A_n) - \frac{\epsilon}{2} \geq \mu^*(A) - \epsilon.$$

Vậy bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 4.2. *Giả sử với mọi $\delta > 0$ và mọi $x \in A$ tồn tại $(x, x + h_x) \in \mathcal{F}$ sao cho $h_x < \delta$. Khi đó, với mọi tập mở $G \supset A$, tồn tại một số hữu hạn các khoảng $\Delta_1, ..., \Delta_p \in \mathcal{F}$ chứa trong G thỏa mãn Bổ đề 4.1.*

Chứng minh. Gọi $\mathcal{F}_1$ là họ các khoảng mở của $\mathcal{F}$ và chứa trong G. Vì G là mở nên theo giả thiết với mọi $x \in A \subset G$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $(x, x+\delta) \subset G$ và $(x, x + \delta) \in \mathcal{F}$. Và do đó $(x, x + \delta) \in \mathcal{F}_1$.

Áp dụng Bổ đề 4.1 cho họ $\mathcal{F}_1$ ta sẽ có được các khoảng mở $\Delta_1, ..., \Delta_p$ thỏa mãn yêu cầu của bổ đề.

Vậy bổ đề được chứng minh. □

Sau đây ta chứng minh kết quả rằng mọi hàm đơn điệu trên một đoạn đều khả vi hầu khắp nơi trên khoảng đó.

Định lý 4.3. *Mọi hàm đơn điệu $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ đều khả vi hầu khắp nơi trên $[a, b]$.*

Chứng minh. Giả sử $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên đoạn $[a, b]$. Đặt

$$D_+(x) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

$$D^+(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

$$D_-(x) = \liminf_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

$$D^-(x) = \limsup_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Khi đó ta có $D_+(x) \leq D^+(x)$ và $D_-(x) \leq D^-(x)$ và hàm f khả vi tại x nếu và chỉ nếu bốn số trên bằng nhau. Hơn nữa, D_+, D^+, D_-, D^- là các hàm đo được trên đoạn $[a, b]$.

Ta sẽ chứng minh tập $A = \{x : D_+(x) < D^+(x)\}$ và tương tự tập $B = \{x : D_-(x) < D^-(x)\}$ có độ đo bằng 0. Với $p < q, p, q$ là các số hữu tỷ. Đặt

$$A_{p,q} = \{x : D_+(x) < p < q < D^+(x)\}.$$

Vì $A = \cup_{p,q} A_{p,q}$ nên ta chỉ cần chứng minh $\mu(A_{p,q}) = 0$, với mọi p, q như trên. Thật vậy, giả sử tồn tại các số hữu tỷ $p < q$ sao cho $\alpha = \mu^*(A_{p,q}) > 0$.

Với mọi $\epsilon > 0$, chọn tập mở $G \supset A_{p,q}$ sao cho $\mu^*(G) < \alpha + \epsilon$.

Lấy $x \in A_{p,q}$. Vì

$$D_+(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < p,$$

nên với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $0 < h < \epsilon$ để $f(x+h) - f(x) < hp$. Vậy x là đầu mút trái của khoảng $(x, x+h)$. Theo Bổ đề 4.2, tồn tại một số hữu hạn các khoảng rời nhau $(x_i, x_i + h_i), i = 1, ..., k$ nằm trong G và phủ tập con $B \subset A_{p,q}$ với $\mu^*(B) > \alpha - \epsilon$. Dễ thấy

$$\sum_{i=1}^{k} h_i < \mu^*(G) < \alpha + \epsilon$$

và

$$\sum_{i=1}^{k} [f(x_i + h_i) - f(x_i)] < p \sum_{i=1}^{k} h_i < p(\alpha + \epsilon).$$

Mặt khác, $D^+(x) > q$ với mọi $x \in A_{p,q}$, nên bằng lập luận như trên ta tìm được một số hữu hạn các khoảng rời nhau $(y_i, y_i + k_i), i = 1, ..., s$ chứa trong tập mở $\cup_{i=1}^{k}(x_i, x_i + h_i)$ và phủ tập con $C \subset B$ với $\mu^*(C) > \mu^*(B) - \epsilon > \mu^*(A) - 2\epsilon$. Ta có

$$\sum_{i=1}^{s} [f(y_i + k_i) - f(y_i)] \geq q \sum_{i=1}^{s} k_i > q(\alpha - 2\epsilon).$$

Do f là đơn điệu tăng và

$$\bigcup_{i=1}^{s} (y_i, y_i + k_i) \subset \bigcup_{i=1}^{k} (x_i, x_i + h_i),$$

với chú ý rằng các khoảng trong hai hợp này là rời nhau, nên ta sẽ có

$$\sum_{i=1}^{s} [f(y_i + k_i) - f(y_i)] \leq \sum_{i=1}^{k} [f(x_i + h_i) - f(x_i)] < p(\alpha + \epsilon).$$

Vậy ta có $q(\alpha - 2\epsilon) < p(\alpha + 2\epsilon)$. Cho $\epsilon \searrow 0$ ta sẽ nhận được $q\alpha \leq p\alpha$ hay $q \leq p$ (trái giả thiết $p < q$).

Vậy $\mu^*(A) = 0$, tức là $D_+(x) = D^+(x)$ hầu khắp nơi.

Tương tự ta có $D_-(x) = D^-(x)$ hầu khắp nơi.

Cuối cùng, trong các lập luận ở trên, ta thay $D_+(x)$ bởi $D_-(x)$ và $D^+(x)$ bởi $D^-(x)$ ta sẽ thu được

$$D^+(x) = D^-(x),\ D_+(x) = D_-(x) \quad \text{hầu khắp nơi.}$$

Vậy ta có, hàm f khả vi hầu khắp nơi trên $[a, b]$.

Vậy định lý được chứng minh. □

4.2. Tính khả vi của tích phân theo cận trên

Ở mục này, dựa vào tính khả vi hầu khắp nơi của hàm đơn điệu, ta sẽ chứng minh định lý cơ bản về mối quan hệ giữa tích phân Lebesgue và đạo hàm. Trước hết, ta có các bổ đề sau đây.

Bổ đề 4.4. *Nếu $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên đoạn $[a, b]$ thì hàm $f'(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ và*

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a).$$

Chứng minh. Do

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \ \text{ với mọi } \ h \neq 0$$

nên theo Bổ đề Fatou ta có

$$\int_a^b f'(x)dx \leq \lim_{h \to 0} \int_a^b \frac{f(x+h) - f(x)}{h} dx. \tag{4.1}$$

Bằng cách đặt $f(x) = f(b)$ với mọi $x > b$ ta có thể coi hàm f xác định trên $[a, \infty)$. Vì f là hàm đơn điệu nên nó khả tích Riemann và do đó tích phân bên vế phải của (4.1) là tích phân Riemann. Bằng cách đổi biến số ta có

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx &= \frac{1}{h}\int_{a+h}^{b+h} f(t)dt - \frac{1}{h}\int_a^b f(t)dt\\ &= \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(t)dt - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)dt\\ &\le \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(b)dt - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(a)dt\\ &= f(b)-f(a).\end{aligned}$$

Vậy bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 4.5. *Nếu hàm f khả tích và với mọi $x \in [a,b]$ ta có $\int_a^x f(t)dt = 0$ thì $f = 0$ hầu khắp nơi trên $[a,b]$.*

Chứng minh. Giả sử $\mu(\{x : f(x) \neq 0\}) > 0$. Đặt

$$A = \{x : f(x) > 0\} \quad \text{và} \quad B = \{x : f(x) < 0\}.$$

Khi đó, hoặc tập A hoặc tập B có độ đo dương. Giả sử $\mu(A) > 0$. Khi đó ta có

$$b - a > \mu([a,b] \setminus A).$$

Do μ là độ đo chính quy nên ta tìm được tập mở $E \supset [a,b] \setminus A$ với $\mu(E) < b - a$.

Từ giả thiết, ta suy ra rằng tích phân của f trên mọi khoảng mở trong $[a,b]$ đều bằng 0. Mặt khác, do E là tập mở nên E có thể viết như hợp không quá đếm được các khoảng mở rời nhau nên ta có $\int_E f(x)dx = 0$. Do đó ta có

$$\int_{[a,b]\setminus E} d(t)dt = \int_{[a,b]} f(t)dt - \int_E f(t)dt = 0. \tag{4.2}$$

Vì $\mu([a,b] \setminus E) = b - a - \mu(E) > 0$ và $f > 0$ trên $[a,b] \setminus E$ nên (4.2) không thể xảy ra.

Vậy bổ đề được chứng minh. □

Định lý 4.6. *Giả sử $f(x)$ là hàm khả tích trên $[a,b]$. Khi đó, hàm xác định bởi*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

có đạo hàm $F'(x) = f(x)$ hầu khắp nơi trên $[a,b]$.

Chứng minh. Ta viết $f = f^+ - f^-$, ở đây
$$f^+ = \max(f, 0) \quad \text{và} \quad f^- = \max(-f, 0).$$

Khi đó, ta có
$$F(x) = \int_a^x f^+(t)dt - \int_a^x f^-(t)dt.$$

Tức là, $F(x)$ là hiệu của hai hàm đơn điệu tăng. Bởi Định lý 4.3, ta suy ra $F(x)$ là hàm khả vi hầu khắp nơi trên đoạn $[a, b]$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh $F'(x) = f(x)$ hầu khắp nơi trên $[a, b]$.

Trước hết, từ giả thiết ta suy ra hàm F là liên tục trên $[a, b]$.

Thật vậy, do f là hàm khả tích nên $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ sao cho $\forall 0 < |h| < \delta,\ \forall x \in [a, b]$ ta có
$$|F(x + h) - F(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| < \epsilon.$$

Để chứng minh $F'(x) = f(x)$ hầu khắp nơi trên $[a, b]$, ta chỉ cần chứng minh
$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a),\ \forall x \in [a, b]. \tag{4.3}$$

Thật vậy, khi đó $\forall x \in [a, b]$ ta có
$$\int_a^x F'(t)dt = \int_a^x f(t)dt \Leftrightarrow \int_a^x [F'(t) - f(t)]dt = 0.$$

Bởi Bổ đề 4.5 ta suy ra $F' = f$ hầu khắp nơi.

Ta xét hai trường hợp sau đây:

- Giả sử f bị chặn: Khi đó, $|f(x)| \le M$ với mọi $x \in [a, b]$. Ta có
$$\left| \frac{F(x + h) - F(x)}{h} \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \le M.$$

Bởi Định lý 4.3, ta có
$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} \to F'(x) \quad \text{hầu khắp nơi khi } h \to 0.$$

Áp dụng Định lý Lebesgue về hội tụ bị chặn ta có
$$\int_a^x \frac{F(t + h) - F(t)}{h} dt \to \int_a^x F'(t)dt \quad \text{khi} \quad h \to 0.$$

Mặt khác, theo chứng minh Bổ đề 4.5, ta có thể viết

$$\int_a^x \frac{F(t+h)-F(t)}{h}dt = \frac{1}{h}\int_{a+h}^{x+h} F(t)dt - \frac{1}{h}\int_a^x F(t)dt \to F(x)-F(a),$$

khi $h \to 0$. Ở đây, giới hạn trên có được là do hàm F liên tục trên $[a, b]$. Vậy ta có (4.3).

• Giả sử f là hàm đo được bất kỳ: bằng cách viết $f = f^+ - f^-$, ta có thể giả sử rằng $f \geq 0$ trên $[a, b]$.

Với mỗi $n \geq 1$, ta đặt $f_n(x) = \min(f(x), n)$. Khi đó, $f - f_n \geq 0$ trên $[a, b]$. Từ đó suy ra hàm

$$\int_a^x [f(t) - f_n(t)]dt$$

là đơn điệu tăng và do vậy đạo hàm của nó là hàm không âm trên $[a, , b]$, tức là

$$\left[\int_a^x [f(t) - f_n(t)]dt\right]' \Leftrightarrow \left[\int_a^x f(t)dt\right]' \geq \left[\int_a^x f_n(t)dt\right]' \quad \text{hầu khắp nơi.}$$

Do hàm f_n bị chặn, nên theo trường hợp 1 ta có $F'(x) \geq f_n(x)$ hầu khắp nơi. Cho $n \to \infty$ ta nhận được $F'(x) \geq f(x)$ hầu khắp nơi. Từ đây suy ra

$$\int_a^x F'(t)dt \geq \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Bởi Bổ đề 4.5, ta có

$$\int_a^x F'(t)dt \leq F(x) - F(a).$$

Từ đó ta nhận được (4.3).

Vậy định lý được chứng minh. □

4.3. Hàm có biến phân bị chặn và hàm tuyệt đối liên tục

Mục tiêu của mục này là đi tìm điều kiện để một hàm cho trước có thể biểu diễn được dưới dạng tích phân theo cận trên của một hàm nào đó. Trước hết, ta đưa ra khái niệm và một số tính chất của hàm có biến phân bị chặn và hàm tuyệt đối liên tục.

Định nghĩa 4.7. Hàm f xác định trên đoạn $[a, b]$ được gọi là có biến phân bị chặn nếu

$$V_a^b(f) := \sup\{\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| : a = x_0 < ... < x_n = b\} < \infty.$$

$V_a^b(f)$ được gọi là biến phân của hàm f trên đoạn $[a, b]$.

Nhận xét 4.8. i) Với hai hàm bất kỳ xác định trên đoạn $[a, b]$ và mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta có

$$V_a^b(\alpha f + \beta g) \leq |\alpha| V_a^b(f) + |\beta| V_a^b(g).$$

ii) Nếu f là hàm đơn điệu trên đoạn $[a, b]$ thì nó có biến phân bị chặn trên đoạn $[a, b]$ và hơn nữa ta có

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)| < \infty.$$

Ta có tính chất sau đây của hàm có biến phân bị chặn trên một đoạn.

Mệnh đề 4.9. *Mọi hàm có biến phân bị chặn đều biểu diễn được dưới dạng hiệu của hai hàm đơn điệu tăng. Và do đó, mọi hàm có biến phân bị chặn đều khả vi hầu khắp nơi.*

Chứng minh. Giả sử f là hàm có biến phân bị chặn trên đoạn $[a, b]$. Với mỗi $x \in [a, b]$ ta đặt

$$g(x) := V_a^x(f),\ f_1(x) := \frac{1}{2}[g(x) + f(x)],\ f_2(x) := \frac{1}{2}[g(x) - f(x)].$$

Khi đó, ta có $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ với mọi $x \in [a, b]$. Ta sẽ chứng minh các hàm f_1, f_2 là đơn điệu tăng trên $[a, b]$. Thật vậy: Lấy $a \leq x' < x'' \leq b$. Khi đó, mọi cách chia đoạn $[a, x']$ bởi các điểm $a = x_0 < x_1 < ... < x_m = x'$ ta có

$$\sum_{i=0}^{m-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x'') - f(x')| \leq V_a^{x''}(f) = g(x'').$$

Suy ra

$$g(x') + |f(x'') - f(x')| \leq g(x'') \Leftrightarrow g(x'') - g(x') \geq |f(x'') - f(x')|.$$

Từ đó suy ra

$$f_1(x'') - f_1(x') = \frac{1}{2}\left([g(x'') - g(x')] + [f(x'') - f(x')]\right) \geq 0,$$

và

$$f_2(x'') - f_2(x') = \frac{1}{2}\left([g(x'') - g(x')] - [f(x'') - f(x')]\right) \geq 0.$$

Vậy f_1, f_2 đơn điệu tăng trên $[a, b]$. Và mệnh đề được chứng minh.

Bởi Định lý 4.3 ta suy ra f khả vi hầu khắp nơi trên $[a, b]$.

Vậy mệnh đề được chứng minh. □

Sau đây là định nghĩa hàm tuyệt đối liên tục.

Định nghĩa 4.10. Hàm $f(x)$ được gọi là tuyệt đối liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon,$$

với mọi họ hữu hạn các khoảng rời nhau $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$ trong (a, b) sao cho $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$.

Nhận xét 4.11. Mọi hàm tuyệt đối liên tục trên một đoạn nào đó thì sẽ liên tục và có biến phân bị chặn trên đoạn đó.

Chứng minh. Giả sử hàm f tuyệt đối liên tục trên đoạn $[a, b]$.

• Ta sẽ chứng minh hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$. Lấy $x_0 \in [a, b]$. Với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ như trong Định nghĩa 4.10. Khi đó với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ta có khoảng (x, x_0) hoặc (x_0, x) thỏa mãn $|x - x_0| < \delta$. Do f tuyệt đối liên tục trên $[a, b]$ nên từ đó suy ra

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

• Ta sẽ chứng minh hàm f có biến phân bị chặn trên đoạn $[a, b]$. Với $\epsilon = 1$, tồn tại $\delta > 0$ để ta có

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < 1$$

với mọi họ hữu hạn các khoảng rời nhau $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$ trong (a, b) sao cho $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$. Giả sử $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ là một cách chia tùy ý của đoạn $[a, b]$. Ta có thể giả sử

$$\max_{0 \le i \le n-1}(x_{i+1} - x_i) < \delta.$$

Ký hiệu $i_1 \ge 1$ là chỉ số lớn nhất mà $x_{i_1} - x_0 \le \delta$. Tiếp tục như vậy, giả sử $i_2 \ge i_1$ là chỉ số lớn nhất mà $x_{i_2} - x_{i_1} \le \delta$. Cứ như vậy ta có $x_{i_p} = x_n$.

Khi đó ta có

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \sum_{i=0}^{i_1-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + ... + \sum_{i=i_{p-1}}^{i_p-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$
$$\leq \frac{b-a}{\delta}.$$

Từ đó suy ra $V_a^b(f) \leq \frac{b-a}{\delta}$.

Vậy nhận xét được chứng minh. □

Ta cần bổ đề sau đây để chứng minh kết quả chính của mục này.

Bổ đề 4.12. *Nếu $f(x)$ là tuyệt đối liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f'(x) = 0$ hầu khắp nơi trên $[a, b]$ thì f là hàm hằng trên $[a, b]$.*

Chứng minh. Cho trước $\epsilon > 0$. Vì f là hàm tuyệt đối liên tục nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$$

với mọi họ hữu hạn các khoảng rời nhau $(a_i, b_i) \subset (a, b),\ i = 1, ..., n$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta.$$

Đặt

$$A = \{x : f'(x) = 0\},$$
$$\mathcal{F} = \{(x, x+h) : 0 < h < \delta, |f(x+h) - f(x)| < \epsilon h\}.$$

Theo giả thiết ta có

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

Từ đây suy ra, với mọi $x \in A$ đều là đầu mút trái của khoảng $(x, x+h) \in \mathcal{F}$ với h đủ nhỏ. Theo Bổ đề 4.2, tồn tại một số hữu hạn các khoảng rời nhau $(x_i, x_i + h_i) \in \mathcal{F}, i = 1, ..., p$ sao cho

$$\mu^* \left(A \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{p} (x_i, x_i + h_i) \right) \right) > \mu^*(A) - \delta = (b - a) - \delta.$$

Gọi $(c_j, d_j), j = 1, ..., q$ là họ các khoảng còn lại trên đoạn $[a, b]$ sau khi đã bỏ đi các khoảng $(x_i, x_i + h_i), i = 1, ..., p$. Khi đó ta có

$$|f(b) - f(a)| \leq \sum_{i=1}^{p} |f(x_i + h_i) - f(x_i)| + \sum_{j=1}^{q} |f(d_j) - f(c_j)|. \tag{4.4}$$

Ta có, tổng thứ nhất trong (4.4) nhỏ hơn $\epsilon \sum_{i=1}^{p} h_i < \epsilon(b - a)$.

Mặt khác, do

$$\sum_{j=1}^{q} (d_j - c_j) \leq (b - a) - [(b - a) - \delta] = \delta$$

nên tổng thứ hai trong (4.4) nhỏ hơn ϵ. Vậy ta có

$$|f(b) - f(a)| < \epsilon(b - a) + \epsilon.$$

Cho $\epsilon \searrow 0$ ta nhận được $f(b) = f(a)$.

Nếu ta thay b với giá trị bất kỳ $x \in [a, b]$ thì các lập luận trên đây vẫn đúng, và do đó ta có $f(x) = f(a)$ với mọi $x \in [a, b]$.

Vậy bổ đề được chứng minh. $\square$

Định lý 4.13. *Hàm $F(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$ có thể viết được dưới dạng*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt, \tag{4.5}$$

với f là hàm khả tích trên $[a, b]$, nếu và chỉ nếu $F(x)$ là hàm tuyệt đối liên tục trên đoạn $[a, b]$.

Chứng minh. • "$\Rightarrow$": Giả sử hàm $F(x)$ được biểu diễn dưới dạng (4.5). Do f khả tích nên ta có với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi tập $E \subset [a, b]$, $\mu(E) < \delta$ ta có

$$\int_E |f(t)|dt < \epsilon.$$

Gọi $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$ là họ hữu hạn các khoảng rời nhau trong $[a, b]$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta.$$

Đặt

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i).$$

Khi đó, ta có $\mu(E) < \delta$ và từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{a_i}^{b_i} f(t)dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} |f(t)|dt = \int_E |f(t)|dt < \epsilon.\end{aligned}$$

Tức là, hàm F là tuyệt đối liên tục trên $[a, b]$.

• "$\Leftarrow$": Giả sử F là hàm tuyệt đối liên tục. Khi đó, F có biến phân bị chặn. Theo Mệnh đề 4.9, hàm F khả vi hầu khắp nơi trên $[a, b]$ và hàm F' khả tích trên $[a, b]$. Bởi Định lý 4.6, hàm

$$G(x) = \int_a^x F'(t)dt$$

có đạo hàm

$$G'(x) = F'(x) \Leftrightarrow (G - F)'(x) = 0$$

hầu khắp nơi trên $[a, b]$. Bởi Bổ đề 4.12, suy ra hàm $G - F$ là hằng số trên $[a, b]$. Từ đó ta có biểu diễn (4.5).

Vậy định lý được chứng minh. □

4.4. Tích phân Lebesgue - Stieljets và tích phân Riemann - Stieljets

Như trong mục 1.6, ta đã xây dựng độ đo trên $\mathbb{R}$ bằng cách mở rộng tự nhiên của hàm độ dài trên các gian tới đại số tập hợp $\mathcal{E}$ sinh bởi các gian (Định lý 1.37). Từ độ đo đó, bởi Định lý 1.28 ta mở rộng thành độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$.

Trong mục này, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp tương tự như trên, tuy nhiên hàm độ dài sẽ được thay thế bằng một hàm tổng quát hơn nhưng vẫn bảo tồn các tính chất của hàm độ dài trên các gian. Một hàm như thế sẽ được gọi là hàm độ dài tổng quát trên các gian trong $\mathbb{R}$. Khi đó, độ đo nhận được sẽ được gọi là độ đo Lebesgue - Stielljets. Sau đây ta sẽ tóm lược quá trình xây dựng độ đo Lebesgue - Stielljets.

Giả sử g là một hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Khi đó, hàm độ dài tổng quát trên $\mathbb{R}$ được xác định như sau

$$\beta[a, b] := g(b^+) - g(a^-),$$
$$\beta[a, b) := g(b^-) - g(a^-),$$

$$\beta(a,b] := g(b^+) - g(a^+),$$
$$\beta(a,b) := g(b^-) - g(a^+).$$

Ta gọi $\mathcal{E}$ là đại số tập hợp sinh bởi họ các gian trên $\mathbb{R}$, tức là tập con $A \subset \mathbb{R}$ thuộc vào $\mathcal{E}$ nếu và chỉ nếu tồn tại một số hữu hạn các gian rời nhau $\Delta_1, ..., \Delta_m$ sao cho $A = \cup_{i=1}^m \Delta_i$. Khi đó, mỗi $A \in \mathcal{E}$ ta đặt

$$\beta(A) := \sum_{i=1}^m \beta(\Delta_i).$$

Khi đó, β là một độ đo trên đại số tập hợp $\mathcal{E}$. Áp dụng Định lý 1.28 ta có thể thác triển độ đo β thành độ đo β_g trên σ - đại số $\mathcal{F}_g$ chứa σ - đại số Borel. Độ đo β_g được là độ đo Lebesgue - Stieljets sinh bởi hàm g. Từ độ đo Lebesgue - Stieljets ta xây dựng tích phân Lebesgue - Stieljets và tích phân Riemann - Stieljets sau đây.

4.4.1. Tích phân Lebesgue - Stieljets

Giả sử f là hàm β_g - đo được và β_g - khả tích trên tập con $A \subset \mathbb{R}$. Khi đó, tích phân $\int_A f(x)d\beta_g$ được gọi là tích phân Lebesgue - Stieljets của hàm f trên A theo hàm g và ký hiệu là

$$(LS)\int_A f(x)dg(x).$$

Từ các định nghĩa trên ta có nếu $a \in \mathbb{R}$ và $f(a) \neq 0$ thì

$$\int_{\{a\}} f(x)dg(x) = f(a)[g(a^+) - g(a^-)] = \begin{cases} 0 & \text{nếu } g \text{ liên tục tại } a \\ \neq 0 & \text{nếu } g \text{ gián đoạn tại } a. \end{cases}$$

Từ đó suy ra, tích phân Lebesgue - Stieljets trên các gian $[a,b], (a,b), [a,b), (a,b]$ là khác nhau.

Nếu hàm bất kỳ g có biến phân bị chặn $[a,b]$ thì ta có biểu diễn $g = g_1 - g_2$, trong đó

$$g_1(x) = \frac{1}{2}\left[V_a^x(g) + g(x)\right], \ g_2(x) = \frac{1}{2}\left[V_a^x(g) - g(x)\right]$$

là các hàm đơn điệu tăng trên đoạn $[a,b]$. Bằng cách đặt $g(x) = 0$ với mọi $x < a$ và $x > b$ ta có thể coi các hàm g, g_1, g_2 xác định trên $\mathbb{R}$. Khi đó, tích phân Lebesgue - Stieljets của hàm f theo g trên A được định nghĩa như sau

$$(LS)\int_A f(x)dg(x) := (LS)\int_A f(x)dg_1(x) - (LS)\int_A f(x)dg_2(x).$$

Ở đây, ta giả sử rằng hàm f là β_{g_1}, β_{g_2} - đo được và khả tích theo β_{g_1} và β_{g_2}.

4.4.2. Tích phân Riemann - Stieljets

Giả sử f, g là hai hàm xác định trên đoạn $[a, b]$. Ta chia đoạn $[a, b]$ bởi các điểm

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

và chọn tùy ý các điểm

$$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, ..., n-1.$$

Khi đó, tổng

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)]$$

gọi là tổng tích phân Riemann - Stieljets của hàm f theo g ứng với cách chia đoạn và cách chọn điểm như trên. Tương tự tích phân Riemann của hàm f, nếu khi

$$n \to \infty \text{ và } \max_{0 \le i \le n-1} (x_{i+1} - x_i) \to 0$$

mà dãy tổng tích phân S_n hội tụ tới giới hạn hữu hạn S không phụ thuộc cách chọn các điểm ξ_i thì giới hạn đó được gọi là tích phân Riemann - Stieljets của hàm f trên đoạn $[a, b]$ theo g, ký hiệu như sau

$$(RS) \int_a^b f(x) dg(x) = S.$$

Ta có một số kết quả sau đây. Kết quả thứ nhất là mối liên hệ giữa tích phân (LS) và (RS), kết quả thứ hai là liên hệ giữa tích phân (RS) và tích phân Lebesgue (L).

Định lý 4.14. *Giả sử các hàm f liên tục, g liên tục và có biến phân bị chặn trên đoạn $[a, b]$. Khi đó, các tích phân (LS) và (RS) của hàm f theo g trên đoạn $[a, b]$ tồn tại và chúng bằng nhau, tức là*

$$(LS) \int_{[a,b]} f(x) dg(x) = (RS) \int_a^b f(x) dg(x).$$

Chứng minh. Gọi

$$\pi_m = \{a = x_0^{(m)} < ... < x_{n_m}^{(m)} = b\}$$

là một phân hoạch của đoạn $[a, b]$ sao cho

$$d(\pi_m) = \max_{0\le i\le n_m-1}(x_{i+1}^{(m)} - x_i^{(m)}) \to 0 \text{ khi } m \to \infty.$$

Với mỗi $m \ge 1$ và mỗi cách chọn họ các điểm $\xi_i^{(m)} \in [x_i^{(m)}, x_{i+1}^{(m)}]$, xét các hàm đơn giản sau đây

$$f_m(x) = f(\xi_i^{(m)}), \quad x \in [x_i^{(m)}, x_{i+1}^{(m)}].$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{i=0}^{n_m-1} f(\xi_i^{(m)})[g(x_{i+1}^{(m)}) - g(x_i^{(m)})] \\ &= (LS)\int_{[a,b]} f_m(x)dg(x). \end{aligned}$$

Vì hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ nên f và do đó f_m bị chặn, tức là

$$|f(x)| < C, |f_m(x)| < C$$

với mọi $x \in [a, b]$ và với mọi $m \ge 1$. Hơn nữa, $f_m(x) \to f(x)$ khi $m \to \infty$ với mọi $x \in [a, b]$. Theo định lý qua giới hạn dưới dấu tích phân ta có

$$S_m = (LS)\int_{[a,b]} f_m(x)dg(x) \to (LS)\int_{[a,b]} f(x)dg(x) \text{ khi } m \to \infty.$$

Tức là

$$(LS)\int_{[a,b]} f(x)dg(x) = (RS)\int_a^b f(x)dg(x).$$

Vậy định lý được chứng minh. □

Định lý 4.15. *Giả sử các hàm f liên tục, g tuyệt đối liên tục trên đoạn $[a, b]$. Khi đó ta có*

$$(RS)\int_a^b f dg = (L)\int_{[a,b]} f(x)g'(x)dx.$$

Chứng minh. Xét cách chia đoạn $[a, b] : a = x_0 < ... < x_n = b$ và cách chọn điểm $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ tùy ý. Đặt

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] - (L)\int_{[a,b]} f(x)g'(x)dx.$$

Vì hàm g tuyệt đối liên tục nên

$$g(x_{i+1}) - g(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} g'(x)dx.$$

Do đó ta có

$$H = \sum_{i=0}^{n-1} (L) \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i) - f(x)]g'(x)dx.$$

Do f liên tục trên đoạn $[a, b]$ nên nó liên tục đều trên $[a, b]$, tức là với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ để nếu

$$\max_{0 \leq i \leq n_m - 1} (x_{i+1} - x_i) < \delta \ \text{ thì } \ \max_{0 \leq i \leq n_m - 1} |f(\xi_i) - f(x)| < \epsilon.$$

Từ đó suy ra

$$|H| < \epsilon \sum_{i=1}^{n-1} (L) \int_{x_i}^{x_{i+1}} |g'(x)|dx = \epsilon(L) \int_a^b |g'(x)|dx \to 0,$$

khi $\epsilon \searrow 0$. Vậy ta có

$$(RS) \int_a^b f dg = (L) \int_{[a,b]} f(x)g'(x)dx$$

tức là định lý được chứng minh. □

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Bài 4.1. Nếu hàm $f(x)$ là hữu hạn tại điểm x_0 và thỏa mãn

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt = 0$$

thì điểm x_0 được gọi là điểm Lebesgue của f. Chứng minh rằng, tại mỗi điểm Lebesgue x_0 của hàm f, hàm $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ tồn tại đạo hàm tại x_0 và $F'(x_0) = f(x_0)$.

Bài 4.2. Chứng minh rằng mọi điểm hữu hạn của một hàm khả tích đều là điểm Lebesgue của nó.

Bài 4.3. Chứng minh rằng nếu hàm f khả tích Lebesgue trên đoạn $[a, b]$ thì tập các điểm Lebesgue của f là hầu khắp nơi trên $[a, b]$.

Bài 4.4. Chứng minh rằng nếu f là hàm tuyệt đối liên tục thì

$$|V_a^x(f)| = |f'(x)|.$$

Bài 4.5. Giả sử f là hàm tuyệt đối liên tục trên đoạn $[a, b]$. Chứng minh rằng

$$\lim_{h\to 0} \int_a^{b-h} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx = V_a^b(f), \quad (h > 0).$$

Bài 4.6. Chứng minh rằng nếu hàm f là tuyệt đối liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì

$$\lim_{h\to 0} \int_a^{b-h} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| dx = 0, \quad (h > 0).$$

Bài 4.7. Chứng minh rằng nếu f là hàm có biến phân bị chặn trên đoạn $[a, b]$ thì

$$\lim_{h\to 0} \int_a^{b-h} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| dx = V_a^b(g),$$

ở đây hàm g xác định bởi

$$g(x) = f(x) - \int_a^x f'(t)dt.$$

Bài 4.8. Giả sử f là hàm có biến phân bị chặn trên (a, b). Chứng minh rằng

$$\int_a^b g(t)df(t) = \int_a^b g(t)f'(t)dt.$$

với mọi hàm đo được g sao cho vế phải tồn tại.

PHỤ LỤC

A. Hàm tập hợp (gọi tắt là hàm tập)

A1. Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa A1. Ta gọi hàm tập là ánh xạ xác định trên một họ nào đó các tập hợp và nhận giá trị thuộc một trong các tập sau đây: tập số thực $\mathbb{R}$, tập $\overline{\mathbb{R}}^+ := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tập $\overline{\mathbb{R}}^- := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, tập số phức $\mathbb{C}$.

Định nghĩa A2. Gọi $\mathcal{S}$ là một họ các tập hợp chứa tập hợp rỗng. Hàm tập μ xác định trên $\mathcal{S}$ được gọi là cộng tính nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) Nếu $A, B \in \mathcal{S}$ và $A \cap B = \emptyset$ thì $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Nếu điều kiện (b) được thỏa mãn với mọi dãy các tập con rời nhau đôi một của $\mathcal{S}$, tức là với mọi dãy $(A_k)_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{S}$ thỏa mãn $A_k \cap A_m = \emptyset$, $\forall k \neq m$ và

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{S}$$

ta có

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k),$$

thì μ được gọi là σ - cộng tính.

Dễ thấy rằng, mọi hàm tập σ - cộng tính cũng là cộng tính.

Ví dụ: Giả sử X là một tập hợp có vô hạn phần tử. Gọi μ là hàm tập xác định trên $\mathcal{P}(X)$ xác định bởi, với $A \subset X$

$$\mu(A) = \begin{cases} n & \text{khi } A \text{ có } n \text{ phần tử} \\ +\infty & \text{khi } A \text{ có vô hạn phần tử.} \end{cases}$$

Khi đó, μ là hàm tập σ - cộng tính.

Chứng minh. Từ định nghĩa của μ ta có $\mu(\emptyset) = 0$. Giả sử (A_k) là một dãy trong $\mathcal{P}(X)$ thỏa mãn $A_k \cap A_m = \emptyset, \forall k \neq m$. Ta xét hai trường hợp sau đây:

• Tồn tại A_{k_0} có vô hạn phần. Khi đó ta có

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) = +\infty.$$

• A_k có hữu hạn phần tử với mọi $k = 1, 2, 3, ..$ Khi đó có hai trường hợp xảy ra là:

- Tồn tại $k_0 \geq 1$ sao cho $A_k = \emptyset$ với mọi $k > k_0$. Khi đó ta có

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{k_0} A_k\right) = \sum_{k=1}^{k_0} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

- Với mọi $k \geq 1$ đều tồn tại $m > k$ sao cho $A_m \neq \emptyset$. Khi đó, bằng cách loại các tập rỗng (do không ảnh hưởng khi lấy hợp và tính tổng) ta có thể giả sử $A_k \neq \emptyset$ với mọi $k = 1, 2, 3, ...$ Vậy ta có

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) = +\infty.$$

$\square$

A2. Biến phân của hàm tập

Định nghĩa A3. Gọi $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X và μ là hàm tập xác định trên $\mathcal{E}$. Với mỗi $A \in \mathcal{E}$, ta gọi biến phân toàn phần (còn gọi tắt là biến phân) của μ trên A, ký hiệu $|\mu|(A)$, được xác định là

$$|\mu|(A) = \sup \sum_{j=1}^{n} |\mu(A_j)|,$$

ở đây, sup được lấy theo tất cả các họ hữu hạn $\{A_j : j = 1, 2, ..., n\} \subset \mathcal{E}$ rời nhau từng đôi một và $A_j \subset A$ với mọi $j = 1, 2, ..., n$.

Ta nói rằng, hàm tập μ có biến phân bị chặn nếu $|\mu|(X) < +\infty$.

Nhận xét A1. Nếu μ là hàm tập cộng tính không âm (tức là μ nhận giá trị trong tập $\overline{\mathbb{R}}^+$) thì $|\mu|(A) = \mu(A)$ với mọi $A \in \mathcal{E}$.

Định lý A1. *Nếu μ là hàm tập cộng tính bị chặn trên đại số tập hợp $\mathcal{E}$ trên X thì μ có biến phân bị chặn và hơn nữa ta có*

$$|\mu|(X) \leq 4 \sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{E}\}. \tag{4.6}$$

Chứng minh. Đặt

$$M = \sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{E}\}.$$

Bởi giả thiết suy ra $M < +\infty$. Để chứng minh (4.6) ta xét hai trường hợp sau đây:

• Xét trường hợp μ nhận giá trị trong $\mathbb{R}$. Gọi

$$\{A_j : j \in J\} \subset \mathcal{E}$$

là một họ hữu hạn (J là tập hữu hạn bất kỳ) các tập rời nhau đôi một. Ta đặt

$$J^+ = \{j \in J : \mu(A_j) \geq 0\}, J^- = \{j \in J : \mu(A_j) < 0\}.$$

Khi đó, ta có

$$\sum_{j\in J} |\mu(A_j)| = \sum_{j\in J^+} \mu(A_j) - \sum_{j\in J^-} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j\in J^+} A_j\right) - \mu\left(\bigcup_{j\in J^-} A_j\right).$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned}
|\mu|(X) &= \sup\{\sum_{j\in J} |\mu(A_j)| : A_j \in \mathcal{E}, A_j \cap A_k = \emptyset, \forall j \neq k\} \\
&= \sup\{\mu\left(\bigcup_{j\in J^+} A_j\right) - \mu\left(\bigcup_{j\in J^-} A_j\right) : A_j \in \mathcal{E}, A_j \cap A_k = \emptyset, \forall j \neq k\} \\
&\leq \sup\{\mu(A) - \mu(B) : A, B \in \mathcal{E}\} \leq 2M.
\end{aligned}$$

• Trường hợp tổng quát μ nhận giá trị trong $\mathbb{C}$. Đặt $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, ở đây μ_1, μ_2 là các hàm tập cộng tính nhận giá trị thực. Ta có thể kiểm tra rằng, μ_1, μ_2 thỏa mãn

$$\sup\{|\mu_1(A)| : A \in \mathcal{E}\} \leq M, \ \sup\{|\mu_2(A)| : A \in \mathcal{E}\} \leq M.$$

Khi đó, với mọi họ hữu hạn các tập rời nhau đôi một $\{A_j : j \in J\} \subset \mathcal{E}$, bởi trường hợp trên ta có

$$\begin{aligned}
|\mu|(X) = \sup \sum_{j\in J} |\mu(A_j)| &\leq \sup \sum_{j\in J} |\mu_1(A_j)| + \sup \sum_{j\in J} |\mu_2(A_j)| \\
&= |\mu_1|(X) + |\mu_2|(X) \\
&\leq 2M + 2M = 4M.
\end{aligned}$$

Vậy (4.6) được chứng minh.

Vậy định lý được chứng minh. □

Định lý A2. *Biến phân toàn phần của một hàm tập cộng tính trên đại số tập hợp $\mathcal{E}$ cũng là hàm tập cộng tính trên $\mathcal{E}$.*

Chứng minh. Bởi định nghĩa suy ra $|\mu|(\emptyset) = 0$.

Lấy $A, B \in \mathcal{E}, A \cap B = \emptyset$. Xét họ hữu hạn các tập rời nhau đôi một như sau

$$\{C_j \subset A \cup B : j \in J\} \subset \mathcal{E}.$$

Đặt

$$A_j = A \cap C_j,\ B_j = B \cap C_j, \forall j \in J.$$

Khi đó ta có

$$A_j \cap B_j = \emptyset \text{ và } C_j = A_j \cup B_j$$

và do đó

$$\mu(C_j) = \mu(A_j) + \mu(B_j).$$

Từ đây suy ra

$$\sum_{j\in J} |\mu(C_j)| \leq \sum_{j\in J} |\mu(A_j)| + \sum_{j\in J} |\mu(B_j)| \leq |\mu|(A) + |\mu|(B).$$

Do đó ta có

$$|\mu|(A \cup B) \leq |\mu|(A) + |\mu|(B). \tag{4.7}$$

Từ (4.7) ta xét hai trường hợp sau:

• Khi $|\mu|(A \cup B) = +\infty$: Lúc này ta có

$$|\mu|(A \cup B) = |\mu|(A) + |\mu|(B) = +\infty.$$

• Khi $|\mu|(A \cup B) < +\infty$: Lúc này, với mọi $\epsilon > 0$ ta có thể tìm được các họ hữu hạn các tập rời nhau từng đôi một

$$\{A_j \subset A : j \in J\} \subset \mathcal{E} \text{ và } \{B_j \subset B : j \in J\} \subset \mathcal{E}$$

sao cho

$$|\mu|(A) \leq \sum_{j\in J} |\mu(A_j)| + \epsilon,\ |\mu|(B) \leq \sum_{j\in J} |\mu(B_j)| + \epsilon.$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} |\mu|(A) + |\mu|(B) &\leq \sum_{j\in J}(|\mu(A_j)| + |\mu(B_j)|) + 2\epsilon \\ &\leq |\mu|(A \cup B) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Cho $\epsilon \downarrow 0$ ta thu được

$$|\mu|(A) + |\mu|(B) \leq |\mu|(A \cup B). \tag{4.8}$$

Từ (4.7) và (4.8) suy ra

$$|\mu|(A \cup B) = |\mu|(A) + |\mu|(B).$$

Vậy định lý được chứng minh. □

Nhận xét A2. a. $|\mu|$ là hàm tập cộng tính nhỏ nhất thỏa mãn $|\mu|(A) \geq |\mu(A)|, \forall E \in \mathcal{E}$.

b. Định lý A2 cũng đúng trong trường hợp hàm tập μ là σ - cộng tính.

Chứng minh. a. Giả sử ν là hàm tập trên $\mathcal{E}$ thỏa mãn

$$\nu(A) \geq |\mu(A)|, \forall A \in \mathcal{E}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\nu(A) \geq |\mu|(A), \forall A \in \mathcal{E}.$$

Thật vậy: Trước hết ta có $\nu \geq 0$ trên $\mathcal{E}$. Lấy họ hữu hạn các tập rời nhau đôi một $\{A_j \subset A : j \in J\}$. Ta có

$$\nu(A) \geq \nu\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) = \sum_{j\in J} \nu(A_j) \geq \sum_{j\in J} |\mu(A_j)|.$$

Từ đây suy ra $\nu(A) \geq |\mu|(A)$.

b. Sinh viên tự chứng minh xem như bài tập.

Vậy nhận xét được chứng minh. □

A3. Các định lý phân tích hàm tập

Định nghĩa A4. Giả sử μ là hàm tập cộng tính nhận giá trị thực. Ta gọi biến phân trên μ^+ và biến phân dưới μ^- là những hàm tập được xác định như sau:

$$\mu^+(A) = \frac{1}{2}\left(|\mu|(A) + \mu(A)\right),\ \mu^-(A) = \frac{1}{2}\left(|\mu|(A) - \mu(A)\right).$$

Định lý A3 (Định lý Jordan). *Nếu μ là hàm tập cộng tính (tương ứng σ - cộng tính) bị chặn xác định trên đại số tập hợp $\mathcal{E}$ thì với $A \in \mathcal{E}$ ta có:*

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B) : B \subset A, B \in \mathcal{E}\}, \tag{4.9}$$

$$\mu^-(A) = -\inf\{\mu(B) : B \subset A, B \in \mathcal{E}\}. \tag{4.10}$$

Các hàm μ^+, μ^- là không âm, cộng tính (tương ứng σ - cộng tính) và

$$\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A),\ |\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A),\ A \in \mathcal{E}. \tag{4.11}$$

Chứng minh. Ta chứng minh chi tiết cho trường hợp μ cộng tính. Trường hợp μ là σ - cộng tính chứng minh tương tự.

• Ta chứng minh công thức (4.9): Lấy $A \in \mathcal{E}$. Với mọi $B \subset A, B \in \mathcal{E}$ ta có

$$\begin{aligned} 2\mu(B) &= \mu(A) + (\mu(B) - \mu(A \setminus B)) \\ &\le \mu(A) + (|\mu(B)| + |\mu(A \setminus B)|) \\ &\le \mu(A) + |\mu|(A) \\ &= 2\mu^+(A). \end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\sup\{\mu(B) : B \subset A, B \in \mathcal{E}\} \le \mu^+(A). \tag{4.12}$$

Mặt khác, ta có với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại họ hữu hạn các tập rời nhau đôi một $\{A_j : j \in J\} \subset \mathcal{E}$ sao cho:

$$\bigcup_{j \in J} A_j = A \text{ và } |\mu|(A) \le \sum_{j \in J} |\mu(A_j)| + \epsilon.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2\mu^+(A) &= |\mu|(A) + \mu(A) \\ &\le \sum_{j\in J} |\mu(A_j)| + \mu(A) + \epsilon \\ &= \sum_{j \in J} |\mu(A_j)| + \mu(\bigcup_{j\in J} A_j) + \epsilon \\ &= \sum_{j\in J^+} \mu(A_j) - \sum_{j \in J^-} \mu(A_j) + \left[\mu(\bigcup_{j\in J^+} A_j) + \mu(\bigcup_{j \in J^-} A_j)\right] + \epsilon \\ &= 2\mu(\bigcup_{j \in J^+} A_j) + \epsilon \\ &\le 2\sup\{\mu(B) : B \subset A, B \in \mathcal{E}\} + \epsilon \end{aligned}$$

Cho $\epsilon \downarrow 0$ ta thu được

$$\mu^+(A) \le \sup\{\mu(B) : B \subset A, B \in \mathcal{E}\}. \tag{4.13}$$

Từ (4.12) và (4.13) suy ra công thức (4.9).

• Ta chứng minh công thức (4.10): Bởi định nghĩa, ta có thể kiểm tra rằng $\mu^- = (-\mu)^+$ trên $\mathcal{E}$. Từ đây và bởi trường hợp trên, với mọi $A \in \mathcal{E}$ ta có

$$\begin{aligned}\mu^-(A) = (-\mu)^+(A) &= \sup\{-\mu(B) : B \subset A, B \in \mathcal{E}\}\\ &= -\inf\{\mu(B) : B \subset A, B \in \mathcal{E}\}.\end{aligned}$$

Vậy (4.10) được chứng minh.

• Bởi Định lý A2 ta suy ra μ^+ và μ^- là cộng tính. Bởi Định nghĩa A3 suy ra μ^+ và μ^- là không âm.

• Ta chứng minh công thức (4.11): Do μ là cộng tính và bị chặn nên bởi Định lý A1 suy ra $|\mu|$ cũng bị chặn. Do đó từ các đẳng thức trong Định nghĩa A4 ta suy ra các đẳng thức (4.11).

Vậy định lý được chứng minh. □

Nhận xét A3. Nếu α và β là các hàm tập cộng tính không âm (tương ứng σ - cộng tính không âm) thỏa mãn $\mu = \alpha - \beta$ thì $\mu^+ \leq \alpha$ và $\mu^- \leq \beta$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh cho trường hợp μ cộng tính. Trường hợp μ là σ - cộng tính được chứng minh tương tự.

• Do $\mu = \alpha - \beta$ nên suy ra $\alpha \geq \mu$ trên $\mathcal{E}$. Lấy $A \in \mathcal{E}$. Với mọi $B \subset A, B \in \mathcal{E}$ ta có

$$\mu(B) \leq \alpha(B) \leq \alpha(A).$$

Suy ra

$$\sup\{\mu(B) : B \subset A, B \in \mathcal{E}\} \leq \alpha(A),$$

tức là $\mu^+(A) \leq \alpha(A)$.

• Ta có $\mu = \alpha - \beta = \mu^+ - \mu^-$. Suy ra $\beta - \mu^- = \alpha - \mu^+ \geq 0$. Vậy ta có $\beta \geq \mu^-$ trên $\mathcal{E}$.

Vậy nhận xét được chứng minh. □

Định lý A4 (Định lý Hahn). *Giả sử μ là hàm tập σ - cộng tính trên σ - đại số $\mathcal{F}$ cá tập con của X và nhận giá trị trong $\overline{\mathbb{R}}$. Khi đó, tồn tại tập $E_0 \in \mathcal{F}$ sao cho $\mu(E) \geq 0$ với mọi $E \in \mathcal{F}, E \subset E_0$ và $\mu(F) \leq 0$ với mọi $F \in \mathcal{F}, F \subset X \setminus E_0$.*

Chứng minh. Ta có thể giả sử $\mu(E) < \infty$ với mọi $E \in \mathcal{F}$ vì trong trường hợp ngược lại, ta xét $-\mu$ tha cho μ và khi đó nếu tồn tại tập E_0 thỏa mãn định lý đối với $-\mu$ thì tập $X \setminus E_0$ sẽ thỏa mãn định lý đối với μ.

Đặt

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{E \in \mathcal{F} : \mu(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}, A \subset E\} \\ &= \{E \in \mathcal{F} : \mu(A \cap E) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}\}.\end{aligned}$$

Hiển nhiên $\emptyset \in \mathcal{P}$. Ta sẽ chứng minh một số tính chất sau đây của họ $\mathcal{P}$:

• Nếu $E_1, E_2 \in \mathcal{P}$ thì $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{P}$. Thật vậy: Lấy $A \in \mathcal{F}, A \subset E_1 \cup E_2$. Ta có

$$\mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap (E_1 \setminus E_1)) \geq 0.$$

Tức là $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{P}$.

• Nếu $E_1, E_2, ... \in \mathcal{P}$ thì ta có

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{P}.$$

Thật vậy: Theo chứng minh ở trường hợp trên ta có

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{P}, \forall n \geq 1.$$

Từ đây suy ra, bằng cách thay E_j bởi $\cup_{i=1}^{j} E_i$ nếu cần, ta có thể giả sử dãy (E_i) là dãy tăng.

Lấy

$$A \in \mathcal{F} \ \text{ và } \ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Do dãy các tập hợp $(A \cap E_i)_i$ là tăng tới A nên ta có

$$\mu(A) = \lim_{i \to \infty} \mu(A \cap E_i) \geq 0.$$

Tức là

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{P}.$$

Lấy dãy tập hợp $(E_n) \subset \mathcal{P}$ sao cho

$$\mu(E_n) \to \sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{P}\}, \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Đặt

$$E_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{P}.$$

Ta có
$$\mu(E_0) = \sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{P}\}.$$

Ta sẽ chứng minh tập E_0 thỏa mãn định lý. Thật vậy:

• Ta có $E_0 \in \mathcal{P}$ nên nếu $E \in \mathcal{F}, E \subset E_0$ thì ta có $\mu(E) \geq 0$.

• Ta còn phải chứng minh với mọi $F \in \mathcal{F}, F \subset CE_0$ thì $\mu(F) \leq 0$. Phản chứng rằng, tồn tại $A_0 \in \mathcal{F}, A_0 \subset CE_0$ sao cho $\mu(A_0) > 0$. Ta xét họ sau
$$\mathcal{Q} = \{E \in \mathcal{F} : E \subset A_0, \mu(E) \geq \mu(A_0)\}.$$

Trên họ $\mathcal{Q}$ ta đưa vào quan hệ thứ tự như sau: $\forall E_1, E_2 \in \mathcal{Q}$
$$E_1 \leq E_2 \;\Leftrightarrow\; E_1 \supset E_2 \;\text{ và }\; \mu(E_2) > \mu(E_1).$$

Ta sẽ chứng minh $(\mathcal{Q}, \leq)$ thỏa mãn điều kiện của Bổ đề Zorn. Thật vậy: giả sử tồn tại $\mathcal{Q}_0$ là họ con tuyến tính của $\mathcal{Q}$. Ta xét hai trường hợp sau đây:

- Trường hợp 1: Giả sử tồn tại $D \in \mathcal{Q}_0$ sao cho
$$\mu(D) = \sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{Q}_0\}.$$
Từ tính chất thứ tự tuyến tính của $\mathcal{Q}_0$ ta suy ra D là cận trên của $\mathcal{Q}_0$.

- Trường hợp 2: Giả sử
$$\mu(D) < \sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{Q}_0\}, \forall D \in \mathcal{Q}_0.$$

Lấy dãy tập hợp $(B_n) \subset \mathcal{Q}_0$ sao cho
$$\mu(B_n) \nearrow \sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{Q}_0\}.$$

Từ tính chất thứ tự tuyến tính của $\mathcal{Q}_0$ ta suy ra $B_n \leq B_{n+1}$. Đặt
$$B_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Khi đó, ta có $B_0 \in \mathcal{F}$. $B_0 \subset A_0$ và
$$\mu(B_0) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \geq \mu(A_0).$$

Từ đây suy ra $B_0 \in \mathcal{Q}$. Hơn nữa
$$\mu(B_0) = \sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{Q}_0\}.$$

Lấy $G \in \mathcal{Q}_0$. Khi đó, $\mu(G) < \mu(B_0)$. Suy ra tồn tại $n \geq 1$ sao cho
$$\mu(G) < \mu(B_n) \leq \mu(B_0).$$

Do đó, B_0 là cận trên của $\mathcal{Q}_0$.

Vậy $(\mathcal{Q}, \leq)$ thỏa mãn điều kiện của Bổ đề Zorn. Áp dụng Bổ đề Zorn, tồn tại phần tử cực đại $M \in \mathcal{Q}$. Ta sẽ chỉ ra rằng $M \in \mathcal{P}$. Thật vậy: nếu $M \notin \mathcal{P}$ thì tồn tại $A \in \mathcal{F}, A \subset M$ sao cho $\mu(A) < 0$. Ta có

$$M \setminus A \subset M \subset A_0$$

và

$$\mu(M \setminus A) = \mu(M) - \mu(A) > \mu(M) \geq \mu(A_0).$$

Suy ra $M \setminus A \in \mathcal{Q}$ và $M \leq M \setminus A$ (mâu thuẫn với tính cực đại của M).

Vậy ta có $M \in \mathcal{P}$. Suy ra $M \cup E_0 \in \mathcal{P}$. Do đó ta có

$$\mu(M \cup E_0) = \mu(M) + \mu(E_0) > \mu(E_0)$$

điều này trái với giả thiết

$$\mu(E_0) = \sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{P}\}.$$

Vậy định lý được chứng minh. □

Nhận xét A4. Với các giả thiết như trong Định lý Hahn, ta có

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap E_0) \text{ và } \mu^-(E) = \mu(E \cap (X \setminus E_0)), \quad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Tức là, μ^+ bằng μ hạn chế lên E_0 và μ^- bằng μ hạn chế lên $X \setminus E_0$.

Định nghĩa A5. Giả sử λ, μ là các hàm tập σ - cộng tính không âm trên σ - đại số $\mathcal{F}$. Ta có các định nghĩa sau đây:

i) Độ đo λ được gọi là liên tục tuyệt đối đối với μ nếu

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \lambda(E) = 0.$$

ii) Độ đo λ được gọi là kỳ dị đối với μ nếu tồn tại $E_0 \in \mathcal{F}$ sao cho

$$\mu(E_0) = 0 \text{ và } \lambda(E) = \lambda(E \cap E_0), \quad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Định lý A5. *Giả sử λ, μ là các hàm tập σ - cộng tính không âm xác định trên σ - đại số $\mathcal{F}$, và giả sử λ là hữu hạn. Khi đó, để λ liên tục tuyệt đối đối với μ điều kiện cần và đủ là từ $\mu(E) = 0$ suy ra $\lambda(E) = 0$.*

Chứng minh. • "$\Rightarrow$": Giả sử λ liên tục tuyệt đối đối với μ. Khi đó, Bởi Định nghĩa A5i) ta có nếu $\mu(E) = 0$ thì $\lambda(E) = 0$.

• "$\Leftarrow$": Giả sử $\lambda(E) = 0$ khi $\mu(E) = 0$. Ta sẽ chứng minh λ liên tục tuyệt đối đối với μ.

Thật vậy: giả sử λ không liên tục tuyệt đối đối với μ. Khi đó, tồn tại $\epsilon > 0$ và dãy $(E_n) \subset \mathcal{F}$ sao cho

$$\lambda(E_n) > \epsilon \quad \text{và} \quad \mu(E_n) < \frac{1}{2^n},\ \forall n \geq 1.$$

Đặt

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k.$$

Khi đó, ta có

$$\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k\right) > \epsilon$$

và

$$\mu(E) \leq \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 0.$$

Vậy ta gặp mâu thuẫn.

Vậy định lý được chứng minh. □

Sau đây ta đưa ra định lý về phân tích của Lebesgue.

Định lý A6 (Định lý phân tích Lebesgue). *Giả sử μ là hàm tập σ - cộng tính không âm trên σ - đại số $\mathcal{F}$. Khi đó, mọi hàm tập σ - cộng tính, không âm, hữu hạn λ xác định trên $\mathcal{F}$ đều được biểu diễn duy nhất dưới dạng $\lambda = \alpha + \beta$, với α là độ đo liên tục tuyệt đối đối với μ và β là độ đo kỳ dị đối với μ.*

Chứng minh. • Tính duy nhất: Giả sử ta có 2 cách biểu diễn như sau

$$\lambda = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2,$$

ở đây, α_1, α_2 là liên tục tuyệt đối đối với μ và β_1, β_2 là kỳ dị đối với μ. Khi đó, ta có

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_2 - \beta_1.$$

Từ đó suy ra $\alpha_1 - \alpha_2$ vừa liên tục tuyệt đối đối với μ và vừa kỳ dị đối với μ. Điều này suy ra $\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$. Và từ đây cũng suy ra $\beta_1 = \beta_2$.

• Sự tồn tại: Đặt

$$\mathcal{K} = \{E \in \mathcal{F} : \mu(E) = 0\}.$$

Ta có thể kiểm tra rằng $\mathcal{K}$ là một σ - đại số tập hợp.

Ta sẽ chỉ ra rằng, tồn tại $E_0 \in \mathcal{K}$ sao cho

$$\lambda(E_0) = \max\{\lambda(E) : E \in \mathcal{K}\}.$$

Thật vậy: lấy dãy $(E_n) \subset \mathcal{K}$ sao cho

$$\lambda(E_n) \nearrow \max\{\lambda(E) : E \in \mathcal{K}\}.$$

Đặt

$$E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Ta có

$$E_0 \in \mathcal{K} \quad \text{và} \quad \lambda(E_0) = \max\{\lambda(E) : E \in \mathcal{K}\}.$$

Đặt

$$\alpha(E) = \lambda(E \cap CE_0) \quad \text{và} \quad \beta(E) = \lambda(E \cap E_0), \quad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Bởi định nghĩa, ta có ngày β là kỳ dị đối với μ. Ta sẽ chứng minh α là liên tục tuyệt đối đối với μ.

Thật vậy: Lấy $F \in \mathcal{F}$ sao cho $\mu(F) = 0$ và $F \subset CE_0$. Vì $E_0 \cup F \in \mathcal{K}$ nên suy ra

$$\beta(E_0 \cup F) = \lambda(E_0) \quad \text{hay} \quad \beta(F) = 0.$$

Bởi Định lý A5 ta suy ra β liên tục tuyệt đối đối với μ.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

A4. Hàm tập chính quy

Định nghĩa A6. Cho X là một không gian tô pô và $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X. Hàm tập μ trên $\mathcal{E}$ được gọi là chính quy nếu với mọi $E \in \mathcal{E}$ và mọi $\epsilon > 0$, tồn tại các tập $F, G \in \mathcal{E}$ sao cho: $\overline{F} \subset E \subset \mathrm{int}(G)$ và $|\mu(H)| < \epsilon$ với mọi $H \in \mathcal{E}, H \subset int(G) \setminus \overline{F}$.

Định lý A7. *Cho X là một không gian tô pô, $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X. Khi đó, một hàm tập μ trên $\mathcal{E}$ là chính quy khi và chỉ khi với mọi $E \in \mathcal{E}$ và với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại các tập $F, G \in \mathcal{E}$ sao cho $\overline{F} \subset E \subset int(G)$ và $|\mu(int(G) \setminus \overline{F})| < \epsilon$.*

Chứng minh. • "$\Rightarrow$": Giả sử μ là hàm tập chính quy. Khi đó, với mọi $E \in \mathcal{E}$ và với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại các tập $F, G \in \mathcal{E}$ sao cho

$$\overline{F} \subset E \subset int(G) \quad \text{và} \quad |\mu(C) < \frac{\epsilon}{4}|, \forall C \in \mathcal{E}, C \subset int(G) \setminus \overline{F}.$$

Ta có

$$|\mu|(int(G) \setminus \overline{F}) \leq 4 \sup\{|\mu(C)| : C \in \mathcal{E}, C \subset int(G) \setminus \overline{F}\} < \epsilon.$$

- "$\Rightarrow$": Nếu $|\mu|(int(G) \setminus \overline{F}) < \epsilon$ thì hiển nhiên ta có

$$|\mu(C)| < \epsilon, \quad \forall C \in \mathcal{E}, C \subset int(G) \setminus \overline{F}.$$

Vậy định lý được chứng minh. □

Định lý A8 (Định lý Alexandrov). *Giả sử X là một không gian tô pô compact và $\mathcal{E}$ là một đại số tập hợp trên X. Khi đó, nếu $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ là một hàm tập cộng tính, chính quy và bị chặn thì μ là σ - cộng tính.*

Chứng minh. Lấy dãy $(E_n) \subset \mathcal{E}$ là các tập rời nhau đôi một sao cho

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}.$$

Với mọi $\epsilon > 0$, bởi Định lý A7, tồn tại tập $F \in \mathcal{E}$ sao cho $\overline{F} \subset E$ và $|\mu|(E \setminus \overline{F}) < \epsilon$.

Hơn nữa, với mỗi $n \geq 1$, tồn tại tập $G_n \in \mathcal{E}$ sao cho

$$E \subset int(G_n) \text{ và } |\mu|\,(int(G_n) \setminus E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Bởi vì

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} int(G_n) \supset \overline{F}$$

và F là tập compact nên tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\bigcup_{n=1}^{m} int(G_n) \supset \overline{F}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\mu|(int(G_n)) - \frac{\epsilon}{2^n}\right)\\ &\geq \sum_{n=1}^{m} |\mu|(int(G_n)) - \epsilon\\ &\geq |\mu|(\overline{F}) - \epsilon \geq |\mu|(E) - 2\epsilon.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n) \geq |\mu|(E).$$

Mặt khác, ta có

$$|\mu|(E) \geq |\mu| \left(\bigcup_{n=1}^{m} E_n \right) = \sum_{n=1}^{m} |\mu|(E_n), \quad \forall m \geq 1.$$

Từ đó suy ra

$$|\mu|(E) = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n),$$

tức là $|\mu|$ là σ - cộng tính.

Bởi vì μ là hàm tập bị chặn nên theo Định lý A1 ta suy ra $|\mu|$ bị chặn. Đặc biệt ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n) < \infty.$$

Từ đây suy ra

$$|\mu| \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=k}^{\infty} |\mu|(E_n) \to 0 \text{ khi } k \to \infty.$$

Mặt khác, ta có

$$\left| \mu(E) - \sum_{n=1}^{k} \mu(E_n) \right| = \left| \mu \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \right) \right| \leq |\mu| \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \right) \to 0 \text{ khi } k \to \infty.$$

Tức là ta có

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

hay μ là σ - cộng tính.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

B. Một số kết quả về độ đo Borel và độ đo Radon

Cho X là không gian Hausdorff compact địa phương. Giả sử X có cơ sở tô pô đếm được. Gọi $\mathcal{B}$ là σ-đại số Borel của X (đó là σ-đại số nhỏ nhất trên X chứa các tập mở). Ta nói rằng hàm $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ là đo được Borel nếu tập $\{x \in X : f(x) > a\}$ là tập Borel (thuộc vào $\mathcal{B}$) với mọi $a \in \mathbb{R}$. Gọi

μ là độ đo Borel trên X. Sau đây ta nhắc lại một số kết quả liên quan tới độ đo Borel.

Định nghĩa B1. Cho μ là một độ đo Borel trên một không gian tô pô X. Ta gọi giá của μ, ký hiệu là suppμ, là tập các $x \in X$ sao cho $\mu(U) > 0$ với mọi lân cận U của x. Ta có thể viết:

$$\text{supp}\mu := \{x \in X : \mu(U) > 0 \text{ với mọi lân cận } U \text{ của x}\}.$$

Định lý B1. *Giả sử X là một không gian tô pô có một cơ sở đếm được các tập mở và μ là độ đo Borel trên X. Khi đó, suppμ là tập con đóng nhỏ nhất F của X sao cho $\mu(X \setminus F) = 0$.*

Chứng minh. Cho $(U_n)_{n\geq 1}$ là một cơ sở đếm được gồm các tập mở của X. Khi đó ta có

$$X \setminus supp\mu = \bigcup_n \{U_n : \mu(U_n) = 0\}.$$

Từ đây suy ra *supp*μ là một tập đóng trong X và

$$\mu(X \setminus supp\mu) = 0.$$

Giả sử $F \subset X$ là một tập đóng sao cho $\mu(X \setminus F) = 0$. Khi đó, ta có

$$X \setminus F \subset \bigcup_n \{U_n : \mu(U_n) = 0\},$$

tức là $supp\mu \subset F$.

Vậy định lý được chứng minh. □

Sau đây ta đưa ra khái niệm tính chính quy của độ đo Borel.

Định nghĩa B2. Cho μ là một độ đo Borel trên không gian tô pô X. Khi đó, độ đo μ được gọi là chính quy nếu với mọi tập Borel B và với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại tập mở U và tập đóng F sao cho:

$$F \subset B \subset U \quad \text{và} \quad \mu(U \setminus F) < \epsilon.$$

Định lý sau khẳng định, có một số điều kiện thích hợp thì tính chính quy là tự động đạt được.

Định lý B2. *Nếu μ là một độ đo Borel hữu hạn trên không gian metric X thì μ là chính quy.*

Chứng minh. Gọi $\mathcal{A}$ là họ các tập Borel thỏa mãn Định nghĩa B2. Ta sẽ chứng minh rằng $\mathcal{A}$ là một σ - đại số tập hợp trên X.

Thật vậy:

• Dễ thấy $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.

• Lấy $A \in \mathcal{A}$ và $\epsilon > 0$. Khi đó, tồn tại tập mở U và tập đóng F sao cho

$$F \subset A \subset U \quad \text{và} \quad \mu(U \setminus F) < \epsilon.$$

Suy ra

$$CU \subset CA \subset CF$$

và

$$\mu(CF \setminus CU) = \mu(U \setminus F) < \epsilon.$$

Tức là $CA \in \mathcal{A}$.

• Giả sử dãy tập Borel $(A_n) \subset \mathcal{A}$. Lấy $\epsilon > 0$. Khi đó, với mỗi $n \geq 1$ tồn tại tập mởi U_n và tập đóng F_n sao cho

$$F_n \subset A_n \subset U_n \quad \text{và} \quad \mu(U_n \setminus F_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

Đặt

$$u = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \ \text{ và } \ F = \bigcup_{n=1}^{m} F_n,$$

ở đây m được chọn đủ lớn sao cho

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus F\right) < \frac{\epsilon}{2}$$

(điều này là có thể vì μ là độ đo hữu hạn).

Khi đó, ta có U là tập mở và F là tập đóng. Hơn nữa ta có

$$F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset U$$

và

$$\begin{aligned} \mu(U \setminus F) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus F_n) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus F\right) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

Vậy $\mathcal{A}$ là một σ - đại số tập hợp.

Hơn nữa, do mỗi tập mở có thể được biểu diễn được dưới dạng hợp của một dãy tăng các tập đóng nên $\mathcal{A}$ chứa các tập mở. Vậy $\mathcal{A}$ chứa tất cả các tập Borel của X.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Kết quả sau đây là một hệ quả của tính chính quy của độ đo.

Định lý B3 (Định lý Vitali - Carathéodory). *Giả sử μ là một độ đo Borel chính quy trên không gian tô pô X và $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích. Khi đó, với $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại hàm nửa liên tục trên $\psi_u : X \longrightarrow [-\infty, \infty)$ và hàm nửa liên tục dưới $\psi_l : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ sao cho*

$$\psi_u \leq \phi \leq \psi_l \quad \text{và} \quad \int_X (\psi_l - \psi_u) d\mu < \epsilon.$$

Chứng minh. • Ta xét trường hợp $\phi \geq 0$: Vì ϕ là giới hạn của một dãy tăng các hàm đơn giản u_n và cũng là tổng của các hàm đơn giản không âm

$$v_n = u_n - u_{n-1}, \ n = 1, 2, 3, ...,$$

nên ϕ có thể được viết dưới dạng

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{B_n},$$

ở đây $c_n \geq 0, \ \forall n \geq 1$ và B_n là các tập Borel.

Bởi tính chính quy của μ nên với mỗi $n \geq 1$, tồn tại tập mở U_n và tập đóng F_n sao cho

$$F_n \subset B_n \subset U_n \ \text{ và } \ c_n \mu(U_n \setminus F_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

Vì ϕ là hàm khả tích nên ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu(B_n) = \int_X \phi d\mu < \infty.$$

Từ đây suy ra tồn tại số nguyên $N \geq 1$ sao cho

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \mu(B_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Đặt
$$\psi_u = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{F_n} \quad \text{và} \quad \psi_l = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{U_n}.$$

Khi đó, ψ_u là hàm nửa liên tục trên, ψ_l là hàm nửa liên tục dưới, $\psi_u \leq \phi \leq \psi_l$ và
$$\begin{aligned}\int_X (\psi_l - \psi_u) d\mu &\leq \sum_{n=1}^{N} c_n \mu(U_n \setminus F_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \mu(U_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu(U_n \setminus F_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \mu(U_n) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

- Ta xét trường hợp ϕ là hàm khả tích bất kỳ: Khi đó, ta viết
$$\phi = \phi^+ - \phi^-.$$

Khi đó, áp dụng trường hợp trên cho các hàm ϕ^+ và ϕ^- ta sẽ thu được kết luận trong định lý cho hàm ϕ.

Vậy định lý được chứng minh. □

Sau đây ta đưa ra khái niệm độ đo Radon.

Định nghĩa B3. Một độ đo Borel μ trên không gian tô pô X được gọi là độ đo Radon nếu $\mu(K) < \infty$ với mọi tập con compact K trong X.

Cho không gian tô pô X. Ta ký hiệu $C_c(X)$ là không gian vectơ các hàm liên tục với giá compact $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Ở đây, ta hiểu giá của hàm ϕ, ký hiệu suppϕ, xác định như sau
$$\text{supp}\phi := \overline{\{x \in X : \phi(x) \neq 0\}}.$$

Mỗi độ đo Radon μ trên X xác định một phiếm hàm tuyến tính Λ trên $C_c(X)$ bởi công thức sau
$$\Lambda(\phi) = \int_X \phi d\mu \quad (\phi \in C_c(X)). \tag{4.14}$$

Phiếm hàm tuyến tính ở trên là dương theo nghĩa $\Lambda(\phi) \geq 0$ khi $\phi \geq 0$. Kết quả sau đây cho ta mệnh đề ngược lại.

Định lý B4 (Định lý biểu diễn Riesz). *Cho X là không gian metric có một vét cạn compact. Nếu Λ là một phiếm hàm tuyến tính dương trên*

$C_c(X)$ thì tồn tại duy nhất một độ đo Radon μ trên X sao cho công thức (4.14) được thỏa mãn.

Ở đây, ta nói rằng không gian metric X có một vét cạn compact nghĩa là tồn tại một dãy các tập con compact $(K_n)_{n\geq 1}$ sao cho

$$K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1}),\ \forall n \geq 1 \quad \text{và} \quad \bigcup_n K_n = X.$$

Ví dụ, giả sử $X \subset \mathbb{C}$ là một tập mở. Khi đó, X là một không gian metric compact nên trên X tồn tại một vét cạn compact. Nếu X là một không gian metric có một vét cạn compact thì nó là một không gian compact địa phương.

Chứng minh Định lý biểu diễn Riesz. • Tính duy nhất: Để chứng minh tính duy nhất của định lý Riesz ta cần bổ đề sau đây.

Bổ đề B5. *Cho X như trong Định lý B4 và μ là một độ đo Radon trên X. Khi đó, với mỗi tập Borel $B \subset X$ ta có*

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \ \text{ là tập compact },K \subset B\}.$$

Chứng minh. Lấy $\alpha < \mu(B)$. Nếu $(K_n)_{n\geq 1}$ là dãy vết cạn các tập compact của X thì $\mu(B \cap K_n)$ là hội tụ tăng tới $\mu(B)$. Vì vậy, tồn tại $N \geq 1$ sao cho

$$\mu(B \cap K_N) > \alpha.$$

Áp dụng Định lý B2 cho độ đo hữu hạn $\mu|_{K_N}$, ta suy ra tồn tại tập con compact $K \subset B \cap K_N$ sao cho $\mu(K) > \alpha$.

Do kết quả trên đúng với mọi α sao cho $\alpha < \mu(B)$ nên bổ đề được chứng minh. □

Giả sử tồn tại μ_1, μ_2 là hai độ đo Radon trên X sao cho công thức (4.14). Khi đó, ta có

$$\int_X \phi d\mu_1 = \int_X \phi d\mu_2, \quad (\phi \in C_c(X)).$$

Nếu K là một tập con compact của X thì lấy hàm ϕ xác định bởi

$$\phi(x) := \max(0, 1 - nd(x, K)), \quad (x \in X).$$

Khi đó, cho $n \to \infty$ ta thu được $\mu_1(K) = \mu_2(K)$.

Bởi Bổ đề B5 ta suy ra

$$\mu_1(B) = \mu_2(B), \quad \text{với mọi tập Borel } B.$$

Điều này suy ra $\mu_1 = \mu_2$. Vậy tính duy nhất được chứng minh.

• **Sự tồn tại:** Trước hết ta đưa ra một số khái niệm: Với K là một tập con compact của X, ta viết $K \prec \phi$ nếu

$$\phi \in C_c(X), \quad 0 \le \phi \le 1, \quad phi = 1 \text{ trên } K.$$

Với U là một tập con mở của X, ta viết $\psi \prec U$ nếu

$$\phi \in C_c(X), \quad 0 \le \phi \le 1, \quad supp\phi \subset U.$$

Để chứng minh sự tồn tại ta cần bổ đề sau đây.

Bổ đề B6. *Cho X như trong Định lý B4, K là tập con compact của X và $U_1, ..., U_N$ là một phủ mở của K. Khi đó, tồn tại $\psi_1, ..., \psi_N \in C_c(X)$ sao cho $\psi_n \prec U_n$ với mỗi n và $K \prec \sum_{n=1}^N \psi_n$.*

Chứng minh. Do K là tập compact và $\cup_{n=1}^N U_n \supset K$ nên ta có thể chọn các tập mở $V_1, ..., V_N$ sao cho

$$\overline{V}_n \subset U_n, n = 1, ..., N \text{ và } K \subset \bigcup_{n=1}^N V_n.$$

Ta định nghĩa hàm ψ_n như sau

$$\psi_n(x) = \frac{d(x, X \setminus V_n)}{d(x, K) + \sum_{k=1}^N d(x, X \setminus V_k)}, \quad (x \in X).$$

Khi đó, ta có thể kiểm tra rằng $\psi_n \prec U_n$ với mỗi $n = 1, ..., N$ và $K \prec \sum_{n=1}^N \psi_n$. □

Ta định nghĩa hàm tập μ^* trên X như sau: nếu U là tập con mở của X thì

$$\mu^*(U) := \sup\{\Lambda(\phi) : \phi \prec U\},$$

và nếu E là một tập con bất kỳ của X thì

$$\mu^*(E) := \inf\{\mu^*(U) : U \text{ là tập mở và } E \subset U\}.$$

Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng μ^* là một độ đo ngoài, tức là μ^* thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

ii) $\mu^*(E_1) \le \mu^*(E_2)$ với mọi $E_1 \subset E_2 \subset X$;

iii) μ^* thỏa mãn tính chất σ - cộng tính dưới, tức là với mọi dãy tập con

$(E_n)_{n\geq 1}$ của X ta có

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Các điều kiện i) và ii) được suy trực tiếp từ định nghĩa của μ^*. Ta sẽ chứng minh iii). Ta có thể giả sử rằng

$$\mu^*(E_n) < \infty, \quad \forall n \geq 1.$$

Cho trước $\epsilon > 0$. Ta có thể chọn các tập mở $U_n, n = 1, 2, ...$ sao cho

$$E_n \subset U_n \text{ và } \mu^*(U_n) < \mu^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}, \quad (\forall n \geq 1).$$

Đặt

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Cho trước ϕ sao cho $\phi \prec U$ và họ các tập $(U_n)_{n\geq 1}$ tạo thành phủ mở của giá *supp*ϕ của ϕ. Do *supp*ϕ là tập compact nên tồn tại $N \geq 1$ sao cho

$$supp\phi \subset \bigcup_{n=1}^{N} U_n.$$

Bởi Bổ đề B6 ta có thể tìm được các hàm $\psi_1, ..., \psi_N \in C_c(X)$ sao cho

$$\psi_n \prec U_n, (n = 1, 2, ..., N) \text{ và } supp\phi \prec \sum_{n=1}^{N} \psi_n.$$

Khi đó, ta có

$$\phi = \sum_{n=1}^{N} \phi\psi_n \quad \text{ và } \quad \phi\psi_n \prec U_n \quad (n = 1, 2, ..., N).$$

Vì vậy ta có

$$\Lambda(\phi) = \Lambda\left(\sum_{n=1}^{N} \phi\psi_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \Lambda(\phi\psi_n) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu^*(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n).$$

Vì đánh giá trên đúng với mọi ϕ sao cho $\phi \prec U$, nên ta có thể kết luận rằng

$$\mu^*(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n).$$

Vì vậy ta có

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \mu^*(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \epsilon.$$

Cho $\epsilon \searrow 0$ ta sẽ thu được mệnh đề iii).

Tiếp theo ta sẽ chỉ ra rằng mọi tập mở trong X đều là μ^* - đo được, tức là nếu $U \subset X$ là tập mở và $E \subset X$ là tập con bất kỳ thì ta có

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U).$$

Thật vậy: cho V là tập mở sao cho $E \subset V$, $\phi \prec (V \cap U)$ và $\psi \prec (V \setminus supp\phi)$. Khi đó, $\phi + \psi \prec V$. Vì vậy ta có

$$\mu^*(V) \geq \Lambda(\phi + \psi) = \Lambda(\phi) + \Lambda(\psi).$$

Vì đánh giá trên đúng với mỗi ψ mà $\psi \prec (V \setminus supp\phi)$ nên ta suy ra

$$\mu^*(V) \geq \Lambda(\phi) + \mu^*(V \setminus supp\phi) \geq \Lambda(\phi) + \mu^*(V \setminus U).$$

Và do đánh giá trên đúng với mỗi ϕ mà $\phi \prec (V \cap U)$, nên nó kéo theo

$$\mu^*(V) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \setminus U) \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U).$$

Lại do đánh giá trên đúng với mọi tập mở V chứa E nên ta suy ra rằng

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U).$$

Bây giờ áp dụng Bổ đề Carathéodory rằng họ các tập μ^* - đo được tạo thành một σ - đại số $\mathcal{F}$ và độ đo ngoài μ^* hạn chế trên $\mathcal{F}$ là một độ đo. Do các tập mở là μ^* - đo được nên tất cả các tập Borel đều là μ^* - đo được. Và do đó μ^* hạn chế trên σ - đại số Borel là một độ đo Borel và ta ký hiệu độ đo đó là μ.

Ta sẽ chứng minh rằng, độ đo μ là một độ đo Radon, tức là chứng minh nếu K là một tập con compact của X thì ta có

$$\mu(K) \leq \inf\{\Lambda(\phi) : K \prec \phi\}.$$

Thật vậy: lấy $\phi \in C_c(X)$ với $K \prec \phi$. Cho trước $\alpha \in (0, 1)$. Nếu ta đặt

$$U = \{x \in X : \phi(x) > \alpha\}$$

thì U là tập mở, $K \subset U$ và $\phi \leq \psi\phi/\alpha$ với mọi $\psi \prec U$. Vì vậy ta có

$$\begin{aligned}\mu(K) \leq \mu(U) &\leq \sup\{\Lambda(\psi) : \psi \prec U\} \\ &\leq \sup\{\Lambda(\psi\phi/\alpha) : \psi \prec U\} \\ &\leq \Lambda(\phi)/\alpha.\end{aligned}$$

Cho $\alpha \to 1$ ta nhận được $\mu(K) \leq \Lambda(\phi)$. Điều này suy ra

$$\mu(K) \leq \inf\{\Lambda(\phi) : K \prec \phi\}.$$

Cuối cùng, ta chỉ ra rằng μ thỏa mãn công thức (4.14). Thật vậy: lấy $\phi \in C_c(X)$. Đặt $K = supp\phi$. Cố định $\beta > 0$ sao cho $\phi(K) \subset (-\beta, \beta)$. Cho trước $\epsilon > 0$, chọn $\gamma_0 < \gamma_1 < ... < \gamma_N$ sao cho

$$\gamma_0 = -\beta, \gamma_N = \beta \text{ và } \gamma_n - \gamma_{n-1} < \epsilon \ (n = 1, ..., N).$$

Với mỗi $n = 1, ..., N$, đặt

$$E_n = \{x \in K : \gamma_{n-1} \leq \phi(x) < \gamma_n\}.$$

Khi đó, bởi định nghĩa của μ^*, ta có thể tìm được các tập mở U_n chứa E_n sao cho

$$\mu(U_n) < \mu(E_n) + \frac{\epsilon}{N}.$$

Nếu cần có thể co U_n lại, ta có thể giả sử thêm rằng

$$\phi < \gamma_n \quad \text{trên} \quad U_n.$$

Bởi Bổ đề B6, tồn tại các hàm $\psi_1, ..., \psi_N \in C_c(X)$ sao cho

$$\psi_n \prec U_n \ (n = 1, ..., N) \text{ và } K \prec \sum_{n=1}^{N} \psi_n.$$

Khi đó, ta có

$$\phi = \sum_{n=1}^{N} \phi\psi_n \quad \text{và} \quad \phi\psi_n \leq \gamma_n\psi_n.$$

Do đó ta có

$$\Lambda(\phi) = \sum_{n=1}^{N} \Lambda(\phi\psi_n) \leq \sum_{n=1}^{N} \gamma_n\Lambda(\psi_n).$$

Do $\psi_n \prec U_n$ với mỗi $n = 1, ..., N$ nên $\Lambda(\psi_n) \le \mu(U_n)$. Và do đó

$$K \prec \sum_{n=1}^{N} \psi_n.$$

Điều này suy ra

$$\mu(K) \le \Lambda\left(\sum_{n=1}^{N} \psi_n\right).$$

Vì vậy ta có

$$\begin{aligned}
\Lambda(\phi) &\le \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n + \beta)\Lambda(\psi_n) - \beta\Lambda\left(\sum_{n=1}^{N} \psi_n\right) \\
&\le \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n + \beta)\mu(U_n) - \beta\mu(K) \\
&\le \sum_{n=1}^{N} (\gamma_{n-1} + \epsilon + \beta)\left(\mu(E_n) + \frac{\epsilon}{N}\right) - \beta\mu(K) \\
&\le \int_X \phi d\mu + \epsilon(\mu(K) + 2\beta + \epsilon).
\end{aligned}$$

Cho $\epsilon \searrow 0$ ta suy ra

$$\Lambda(\phi) \le \int_X \phi d\mu.$$

Lặp lại lập luận trên đây khi thay ϕ bởi $-\phi$ ta nhận được

$$\Lambda(\phi) \ge \int_X \phi d\mu.$$

Vậy công thức 4.14 được chứng minh.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

C. Sự hội tụ *yếu

Sau đây chúng ta sẽ nhắc lại khái niệm hội tụ *yếu. Cho X là một không gian metric compact. Ta ký hiệu $C(X)$ là không gian vectơ các hàm liên tục $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Trên $C(X)$ ta trang bị chuẩn sup như sau: với $\phi \in C(X)$ ta đặt

$$||\phi|| := \sup_X \phi.$$

Ta ký hiệu $\mathcal{P}(X)$ là họ tất cả các độ đo Borel xác suất trên X, tức là

$\mu \in \mathcal{P}(X)$ nếu μ là độ đo Borel thỏa mãn $\mu(X) = 1$. Ta có khái niệm sau đây.

Định nghĩa C1. Một dãy $(\mu_n)_{n\geq 1}$ trong $\mathcal{P}(X)$ được gọi là hội tụ *yếu tới $\mu \in \mathcal{P}(X)$, ký hiệu $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$ nếu

$$\int_X \phi d\mu_n \to \int_X \phi d\mu \quad \text{với mọi } \ \phi \in C(X).$$

Định lý C1. *Cho X là không gian metric compact. Khi đó, mọi dãy $(\mu_n)_{n\geq 1}$ trong $\mathcal{P}(X)$ đều tồn tại một dãy con hội tụ *yếu tới một độ đo Borel xác suất $\mu \in \mathcal{P}(X)$ nào đó.*

Để chứng minh Định lý C1 ta cần bổ đề sau đây.

Bổ đề C2. *Nếu X là một không gian metric compact thì $C(X)$ là không gian khả tách, tức là $C(X)$ có một tập con đếm được trù mật.*

Chứng minh. Vì X là không gian metric compact nên nó có một cơ sở đếm được các tập mở $(U_n)_{n\geq 1}$. Với mỗi cặp m, n sao cho $\overline{U}_m \cap \overline{U}_n = \emptyset$, ta định nghĩa hàm $\psi_{m,n} \in C(X)$ bởi công thức sau

$$\psi_{m,n}(x) = \frac{d(x, \overline{U}_m)}{d(x, \overline{U}_m) + d(x, \overline{U}_n)} \quad (x \in X).$$

Khi đó, họ đếm được các hàm $(\psi_{m,n})$ là tách các điểm của X.

Gọi P là họ tất cả các tích hữu hạn của các hàm $\psi_{m,n}$ cùng với hàm hằng 1. Và gọi Q là tập tất cả các tổ hợp $\mathbb{Q}$ - tuyến tính hữu hạn các phần tử của P. Khi đó, Q là tập đếm được và $\overline{Q}$ là đại số con đóng của $C(X)$ và Q tách các điểm và chứa các hằng số. Bởi Định lý Stone - Weierstrass ta có $\overline{Q} = C(X)$. Vậy Q là tập con đếm được trù mật trong $C(X)$.

Vậy bổ đề được chứng minh. □

Chứng minh Định lý C1. Gọi $(\phi_n)_{n\geq 1}$ là họ đếm được trù mật trong $C(X)$.

Do dãy

$$\left(\int_X \phi_1 d\mu_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{bị chặn}$$

nên tồn tại dãy con hội tụ. Ta gọi dãy con đó là

$$\left(\int_X \phi_1 d\mu_n\right)_{n\in\mathbb{N}_1} \quad (\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}).$$

Tương tự, do dãy

$$\left(\int_X \phi_2 d\mu_n\right)_{n\in\mathbb{N}_1}$$

bị chặn nên tồn tại dãy con

$$\left(\int_X \phi_2 d\mu_n\right)_{n\in\mathbb{N}_2} \quad (\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1)$$

hội tụ. Tiếp tục quá trình lập luận như vậy, ta thu được họ các dãy con giảm dần các số tự nhiên

$$\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset ...$$

thỏa mãn với mọi $j \geq 1$ ta có dãy

$$\left(\int_X \phi_j d\mu_n\right)_{n\in\mathbb{N}_j}$$

hội tụ.

Gọi $n_1, n_2, n_3, ...$ là dãy các số tự nhiên đầu tiên của lần lượt các tập $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \mathbb{N}_3, ...$ Khi đó, ta có

$$n_1 < n_2 < n_3 < ...$$

và dãy

$$\left(\int_X \phi_j d\mu_{n_k}\right)_{k\geq 1}$$

hội tụ với mỗi ϕ_j. Do dãy (ϕ_j) là trù mật trong $C(X)$ nên suy ra dãy

$$\left(\int_X \phi d\mu_{n_k}\right)_{k\geq 1}$$

hội tụ với mọi $\phi \in C(X)$. Vì vậy ta có thể định nghĩa ánh xạ $\Lambda : C(X) \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\Lambda(\phi) = \lim_{k\to\infty} \int_X \phi d\mu_{n_k} \quad (\phi \in C(X)).$$

Khi đó, Λ là phiếm hàm tuyến tính xác định dương trên $C(X)$. Bởi Định lý biểu diễn Riesz (Định lý B4), tồn tại một độ đo Borel μ trên X sao cho

$$\Lambda(\phi) = \int_X \phi d\mu, \quad (\phi \in C(X)).$$

Ta có μ là độ đo xác suất vì

$$\mu(X) = \Lambda(1) = \lim_{k\to\infty} \int_X d\mu_{n_k} = 1.$$

Vậy $\mu \in \mathcal{P}(X)$ và rõ ràng $\mu_{n_k} \xrightarrow{w^*} \mu$ khi $k \to \infty$.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Kết quả sau đây chỉ ra sự tồn tại của độ đo Borel xác suất kéo lui bởi toàn ánh liên tục giữa các không gian metric compact.

Định lý C3. *Cho X và Y là các không gian metric compact và $T : X \longrightarrow Y$ là một toàn ánh liên tục. Khi đó, với mỗi $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ đều tồn tại $\mu \in \mathcal{P}(X)$ sao cho $\mu T^{-1} = \nu$, tức là*

$$\int_X \phi(T(x))d\mu(x) = \int_Y \phi(y)d\nu(y) \quad (\phi \in C(Y)).$$

Chứng minh. Do Y là tập compact, nên với mỗi $n \geq 1$, tồn tại họ hữu hạn các tập Borel $(B_{n,j})_j$ sao cho đường kính $d(B_{n,j}) < \frac{1}{n}$ là một phân hoạch của Y. Với mỗi j ta chọn điểm $y_{n,j} \in B_{n,j}$.

Với mỗi $n \geq 1$, ta định nghĩa độ đo như sau

$$\nu_n = \sum_j \nu(B_{n,j})\delta_{y_{n,j}},$$

ở đây, δ_y là khối đơn vị tại y, tức là hàm tập xác định như sau

$$\delta_y(A) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A \\ 0 & \text{nếu } x \notin A. \end{cases}$$

Khi đó, $\nu_n \in \mathcal{P}(Y)$ với mọi $n \geq 1$.

Lấy $\phi \in C(Y)$. Do Y là không gian compact nên ϕ liên tục đều trên Y. Vì vậy ta có

$$\left| \int_Y \phi d\nu_n - \int_Y \phi d\nu \right| \leq \sum_j \nu(B_{n,j}) \sup_{y \in B_{n,j}} |\phi(y) - \phi(y_{n,j})| \to 0 \text{ khhi } n \to \infty.$$

Tức là $\nu_n \xrightarrow{w^*} \nu$ trong $\mathcal{P}(Y)$.

Do T là một toàn ánh nên với mỗi n, j tồn tại $x_{n,j} \in X$ sao cho

$$T(x_{n,j}) = y_{n,j}.$$

Với mỗi $n \geq 1$, ta định nghĩa độ đo như sau

$$\mu_n = \sum_j \nu(B_{n,j})\delta_{x_{n,j}}.$$

Khi đó, ta có $\mu_n \in \mathcal{P}(X)$ và $\mu_n T^{-1} = \nu_n$. Bởi Định lý C1, tồn tại dãy con $(\mu_{n_k})_k$ hội tụ *yếu tới $\mu \in \mathcal{P}(X)$.

Do T liên tục nên suy ra

$$\mu_{n_k} T^{-1} \xrightarrow{w^*} \mu T^{-1}.$$

Và do đó

$$\mu_n T^{-1} = \nu_n \xrightarrow{w^*} \nu.$$

Từ đó suy ra $\mu T^{-1} = \nu$ như định lý yêu cầu.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Văn Khuê, Bùi Đắc Tắc (1996), *Không gian tô pô, độ đo và lý thuyết tích phân*, NXB Trường ĐH Sư phạm Hà Nội.

[2] Bùi Đắc Tắc, Nguyễn Thanh Hà (1999), *Bài tập Không gian tô pô - độ đo - tích phân*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[3] Hoàng Tụy (2003), *Hàm thực và giải tích hàm (Giải tích hiện đại)*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[4] Robert B. Ash (1972), *Measure, Integration and Functional Analysis*, Academic Press Inc..

[5] Junghenn, Hugo Dietrich (2018), *Principles of real analysis: measure, integration, functional analysis and applications*, CRC Press.

[6] J Yeh (2006), *Real Analysis: Theory of Measure and Integration*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd..

Giáo trình Độ đo và tích phân

Hoàng Nhật Quy, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Phòng 501, Nhà Điều hành ĐHQG-HCM, P. Linh Trung, TP Thủ Đức, TP.HCM.
ĐT: 028 62726361
E-mail: vnuhp@vnuhcm.edu.vn
Website: vnuhcmpress.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản và nội dung
PGS.TS NGUYỄN MINH TÂM

Biên tập
TRẦN THỊ ĐỨC LINH

Sửa bản in
ÁI NHẬT

Trình bày bìa
NGỌC TRẦN

Đối tác liên kết
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM - ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Xuất bản lần thứ 1. Dung lượng: 2.37 MB, khổ 16 x 24 cm. Số XNĐKXB: 2009-2024/CXBIPH/4- 20/ ĐHQGTPHCM. QĐXB số: 100/QĐ-NXB-ĐT cấp ngày 17/6/2024. Đăng tải tại: **www.vnuhcmpress.edu.vn**. Nộp lưu chiểu: Năm 2024. ISBN: **978-604-479-647-5.**

ISBN:978-604-479-647-5
NXB ĐHQG-HCM
9 786044 796475

Giá:

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

GIÁO TRÌNH ĐỘ ĐO và TÍCH PHÂN

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ISBN: 978-604-479-647-5

NXB ĐHQG-HCM

9786044796475

Giá: 100.000 đ