

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

CHỦ BIÊN: TS. NGUYỄN ĐÌNH LẦU

Tác giả tham gia: TS. Phạm Anh Phương, TS. Trần Văn Hưng



GIÁO TRÌNH TOÁN RỜI RẠC

Đà Nẵng, tháng 02/2023

MỤC LỤC

MỤC LỤC	i
LỜI NÓI ĐẦU.....	iv
DANH MỤC HÌNH	vii
DANH MỤC BẢNG	x
CHƯƠNG 1. CÁC KIẾN THỨC CƠ SỞ	1
Tóm tắt chương.....	1
1.1 Thuật toán.....	1
1.1.1 Khái niệm	1
1.1.2 Đánh giá độ phức tạp của thuật toán	5
1.2 Quy nạp toán học và đệ quy	7
1.2.1 Quy nạp toán học.....	7
1.2.2 Giải thuật đệ quy	8
Bài tập chương 1.....	11
Chương 2. BÀI TOÁN ĐẾM	12
Tóm tắt chương.....	12
2.1 Tập hợp.....	12
2.1.1 Các khái niệm cơ bản	12
2.1.2 Các phép toán trên tập hợp.....	13
2.2 Các nguyên lý đếm cơ bản.....	13
2.2.1 Nguyên lý cộng.....	13
2.2.2 Nguyên lý nhân.....	14
2.2.3 Nguyên lý bù trừ.....	14
2.3 Giải tích tổ hợp	16
2.3.1 Chỉnh hợp lặp	16
2.3.2 Hoán vị	17
2.3.3 Tổ hợp.....	18
2.3.4 Hoán vị lặp	18
2.3.5 Tổ hợp lặp.....	18
2.4 Hệ thức truy hồi.....	19

2.4.1 Công thức truy hồi.....	19
2.4.2 Giải công thức truy hồi bằng phương pháp lặp	20
2.4.3 Giải công thức truy hồi bằng phương trình đặc trưng	20
Bài tập chương 2.....	22
Chương 3. BÀI TOÁN TỒN TẠI	24
Tóm tắt chương.....	24
3.1 Giới thiệu một số bài toán tồn tại	24
3.2 Nguyên lý Dirichlet	27
Bài tập chương 3.....	29
Chương 4. BÀI TOÁN LIỆT KÊ	30
Tóm tắt chương.....	30
4.1 Phát biểu bài toán	30
4.2 Phương pháp sinh	30
4.2.1 Thứ tự từ điển	30
4.2.2 Phương pháp sinh	31
4.3 Các thuật toán về phương pháp sinh.....	31
4.3.1 Liệt kê dãy nhị phân	31
4.3.2 Liệt kê tổ hợp chập r từ n phần tử.....	34
4.3.3 Liệt kê hoán vị	38
4.3.4 Liệt kê dãy tập con	41
4.3.5 Liệt kê dãy bị chặn	43
4.4 Phương pháp quay lui.....	47
4.5 Các thuật toán về phương pháp quay lui	50
4.5.1 Liệt kê các dãy nhị phân có độ dài n	50
4.5.2 Liệt kê các hoán vị.....	51
4.5.3 Tổ hợp chập r từ n phần tử.....	53
Bài Tập chương 4	55
Chương 5. TỐI ƯU MẠCH TỔ HỢP	56
Tóm tắt chương.....	56
5.1 Đại số Boole	56

5.2 Biểu diễn hàm Boole	58
5.2.1 Hàm Boole	58
5.2.2 Biểu diễn hàm Boole	60
5.3 Mạch tổ hợp.....	68
5.4 Cực tiểu hóa mạch tổ hợp.....	71
5.4.1 Bài toán cực tiểu hoá mạch.....	71
5.4.2 Phương pháp bản đồ Karnaugh.....	73
5.4.3 Rút gọn biểu thức Boole 2 biến.....	73
5.4.4 Rút gọn biểu thức Boole 3 biến.....	75
Bài tập chương 5.....	79
Chương 6. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ.....	82
Tóm tắt chương.....	82
6.1 Các khái niệm cơ bản	82
6.1.1. Đồ thị, đỉnh, cạnh, cung.....	82
6.1.2. Đường đi, chu trình, liên thông	85
6.2 Biểu diễn đồ thị	89
6.2.1 Ma trận kề.....	89
6.2.2 Ma trận liên thuộc.....	91
6.3. Đồ thị đẳng cấu.....	93
6.4 Đồ thị phẳng	94
Bài tập chương 6.....	95
Chương 7. CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG ĐI.....	97
Tóm tắt chương.....	97
7.1 Đồ thị euler	97
7.1.1 Định nghĩa	97
7.1.2 Điều kiện cần và đủ	98
7.1.3 Các thuật toán tìm chu trình Euler.....	100
7.2 Tìm đường đi ngắn nhất	106
7.2.1 Phát biểu bài toán	106
7.2.2 Thuật toán Dijkstra	106

7.2.3 Thuật toán Floyd.....	114
7.3.4 Thuật toán Floyd mở rộng (Floyd-Warshall)	116
7.3 Đồ thị Hamilton	124
7.3.1 Định nghĩa	124
7.3.2 Điều kiện cần	124
7.3.3 Điều kiện đủ	128
7.3.4 Mã Gray	128
Bài tập chương 7	131
CHƯƠNG 8. CÂY	135
Tóm tắt chương.....	135
8.1 Các khái niệm cơ bản	135
8.1.1 Định nghĩa	135
8.1.2 Định lý tương đương (Định lý 1).....	136
8.1.3 Cây m-phân	137
8.2 Cây phủ.....	139
8.2.1 Định nghĩa và tính chất.....	139
8.2.2 Các thuật toán tìm cây phủ	139
8.3 Cây phủ nhỏ nhất.....	147
8.3.1 Phát biểu bài toán	147
8.3.2 Thuật toán Prim tìm cây phủ nhỏ nhất	147
8.3.3 Thuật toán Kruskal tìm cây phủ nhỏ nhất	152
8.3.4 Ứng dụng	156
8.4 Cây nhị phân tìm kiếm	157
8.4.1 Cây nhị phân.....	157
8.4.2 Duyệt cây	157
8.4.3 Cây nhị phân tìm kiếm (binary search tree)	160
Bài tập chương 8.....	162
TÀI LIỆU THAM KHẢO	163

LỜI NÓI ĐẦU

Toán rời rạc là lĩnh vực nghiên cứu các đối tượng rời rạc để giải quyết các bài toán đếm các đối tượng, liệt kê các đối tượng rời rạc, nghiên cứu các mối quan hệ giữa các tập hợp, phân tích các quá trình hữu hạn. Việc cất giữ, lưu trữ và xử lý thông tin trên máy tính bản chất là quá trình rời rạc.

Boole là một trong những nhà khoa học tiên phong nghiên cứu cơ chế biểu diễn quá trình tư duy logic. Năm 1854 ông viết cuốn *Các qui luật tư duy*. Đóng góp lớn nhất của Boole là phát triển lý thuyết logic bằng *ký hiệu* thay cho từ ngữ và có thể sử dụng đại số Boole, hàm Boole để thiết kế mạch tổ hợp từ đó nghiên cứu mạch điện.

Đồ thị là một cấu trúc rời rạc gồm các *đỉnh* và các *cung* nối các đỉnh đó. Đây là công cụ hữu hiệu để mô hình hoá và giải quyết các bài toán trong nhiều lĩnh vực khoa học, kỹ thuật, kinh tế, xã hội, ... Chẳng hạn, đồ thị có thể sử dụng để xác định các mạch vòng trong các vấn đề giải tích mạch điện. Chúng ta có thể phân biệt các hợp chất hoá học hữu cơ khác nhau với cùng công thức phân tử nhưng khác nhau cấu trúc phân tử nhờ đồ thị. Chúng ta có thể xác định xem hai máy tính trong mạng có thể trao đổi thông tin được với nhau hay không nhờ mô hình đồ thị của mạng máy tính. Đồ thị có trọng số trên các cạnh có thể sử dụng để giải các bài toán như tìm đường đi ngắn nhất giữa hai thành phố trong mạng giao thông. Ngoài ra, chúng ta có thể sử dụng đồ thị để giải các bài toán về lập lịch, thời khoá biểu, và phân bố tầng số cho các trạm phát thanh và truyền hình. Những tư tưởng cơ bản của lý thuyết đồ thị được đề xuất vào những năm đầu của thế kỷ 18 bởi nhà toán học lỗi lạc người Thụy Sĩ Leonhard Euler. Chính ông là người đã sử dụng đồ thị để giải bài toán nổi tiếng về các cái cầu ở thành phố Königsberg.

Giáo trình này nhằm giới thiệu kiến thức cơ bản trong ba lĩnh vực có nhiều ứng dụng của toán rời rạc. Lĩnh vực thứ nhất tập trung nghiên cứu về thuật toán, độ phức tạp của thuật toán, công thức truy hồi, quy nạp toán học, lý thuyết tổ hợp, các nguyên lý trong tổ hợp, các bài toán đếm, các bài toán tồn tại và các bài toán liệt kê. Lĩnh vực thứ hai tập trung nghiên cứu về hàm đại số logic, đại số Boole, biểu diễn hàm Boole, xây dựng các mạch tổ hợp cũng như cực tiểu hoá các mạch tổ hợp để thiết kế được các mạch tổ hợp. Lĩnh vực thứ ba là lý thuyết đồ thị tập trung nghiên cứu về các khái niệm đồ thị, biểu diễn đồ thị, đồ thị Hamilton, đồ thị Euler, các bài toán về đường đi và các bài toán về cây phủ...

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn các đồng nghiệp, các nhà khoa học đã động

viên và góp ý cho giáo trình Toán rời rạc này và lời cảm ơn đặc biệt xin dành cho Trường Đại học Sư phạm, Khoa Tin học về sự giúp đỡ quý báu và tạo điều kiện thuận lợi cho việc xuất bản giáo trình này. Nhóm tác giả mong tiếp tục nhận được sự góp ý của các đồng nghiệp và độc giả về những thiếu sót khó tránh khỏi của cuốn giáo trình.

Tác giả

Nguyễn Đình Lâu

DANH MỤC HÌNH

Hình 1.1 Sơ đồ khối của thuật toán giải phương trình bậc 2	2
Hình 1.2 Sơ đồ khối của thuật toán tìm số lớn nhất của dãy	3
Hình 3.1 Bài toán 19 hình lục giác thần bí	26
Hình 4.1 Sơ đồ khối thuật toán liệt kê dãy kế tiếp	33
Hình 4.2 Sơ đồ khối liệt kê tổ hợp chập r của n phần tử	36
Hình 4.3 Sơ đồ khối liệt kê hoán vị	39
Hình 4.4 Mô tả thuật toán quay lui	49
Hình 4.5 Quay lui liệt kê dãy nhị phân $n=3$	51
Hình 4.6 Mô tả thuật toán quay lui liệt kê dãy hoán vị với $n=3$	52
Hình 4.7 Mô tả thuật toán quay lui liệt kê dãy tổ hợp chập $r=3$ của $n=4$	54
Hình 5.1 Mạch tổ hợp u chưa xác định	69
Hình 5.2 Mạch tổ hợp u đã xác định	70
Hình 5.3 Mạch tổ hợp bước 1	70
Hình 5.4 Mạch tổ hợp bước 2	70
Hình 5.5 Mạch tổ hợp bước 3	70
Hình 5.6 Mạch tổ hợp bước 4	70
Hình 5.7 Mạch tổ hợp bước 5	71
Hình 5.8 Mạch tổ hợp ứng với lời giải	72
Hình 5.9 Mạch tổ hợp rút gọn	73
Hình 6.1 Đồ thị 2 đỉnh 1 cạnh	82
Hình 6.2 Đồ thị 4 đỉnh 7 cạnh	82
Hình 6.3 Đồ thị có hướng 2 đỉnh 1 cung	82
Hình 6.4 Đồ thị có hướng 6 đỉnh 8 cung	83
Hình 6.5 Đồ thị đơn	83
Hình 6.6 Đồ thị vô hướng 7 đỉnh	84
Hình 6.7 Đồ thị có hướng 6 đỉnh	84
Hình 6.8 Đồ thị K_5	85
Hình 6.9 Đồ thị vô hướng 7 đỉnh	86
Hình 6.10 Đồ thị gán trọng số	87
Hình 6.11 Các thành phần liên thông	88
Hình 6.12 Đồ thị G_1 và G_2 có trọng số bằng 1	89
Hình 6.13 Đồ thị vô hướng 5 đỉnh	90
Hình 6.14 Đồ thị có hướng 6 đỉnh	90

Hình 6.15 Đồ thị vô hướng có trọng số	91
Hình 6.16 Đồ thị vô hướng có cạnh liên thuộc.....	92
Hình 6.17 Đồ thị có hướng có cung liên thuộc.....	92
Hình 6.18 Hai đồ thị đẳng cấu	93
Hình 6.19 Hai đồ thị đẳng cấu G_1 và G_2	94
Hình 6.20 Đồ thị phẳng	94
Hình 7.1 Biểu diễn chu trình Euler.....	97
Hình 7.2 Biểu diễn đường đi Euler.....	98
Hình 7.3 Đồ thị không có chu trình và đường đi Euler	98
Hình 7.4 Đồ thị 1 đỉnh và 1 khuyên	99
Hình 7.5 Đồ thị 8 đỉnh.....	99
Hình 7.6 Đồ thị 9 đỉnh.....	100
Hình 7.7 Đồ thị có hướng 4 đỉnh.....	100
Hình 7.8 Sơ đồ khối cho thuật toán tìm chu trình Euler.....	102
Hình 7.9 Đồ thị thanh mã tàu Mohammed	103
Hình 7.10 Đồ thị thanh mã tàu Mohammed đã xoá chu trình	103
Hình 7.11 Đồ thị thanh mã tàu Mohammed đã xoá đỉnh	104
Hình 7.12 Đồ thị 6 đỉnh.....	105
Hình 7.13 Sơ đồ thuật toán Dijkstra	108
Hình 7.14 Đồ thị có hướng 4 đỉnh.....	109
Hình 7.15 Đồ thị gán nhãn khởi tạo	110
Hình 7.16 Đồ thị gán nhãn bước 1	110
Hình 7.17 Đồ thị gán nhãn bước 2	111
Hình 7.18 Đồ thị gán nhãn bước 3	111
Hình 7.19 Đồ thị có hướng 11 đỉnh.....	112
Hình 7.20 Đồ thị có hướng 11 đỉnh đã gán nhãn.....	113
Hình 7.21 Đồ thị dùng lập bảng	113
Hình 7.22 Đồ thị biểu diễn thuật toán Floyd	115
Hình 7.23 Đồ thị biểu diễn thuật toán Floyd mở rộng	118
Hình 7.24 Đồ thị biểu diễn chu trình Hamilton.....	124
Hình 7.25 Đồ thị G_1 và G_2	125
Hình 7.26 Đồ thị xếp chỗ ngồi lần 1	126
Hình 7.27 Đồ thị xếp chỗ ngồi lần 2	126
Hình 7.28 Đồ thị xếp chỗ ngồi lần 3	127
Hình 7.29 Đồ thị xếp chỗ ngồi lần 4	127