



ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TS. NGUYỄN ĐÌNH LẬU (Chủ biên)
TS. PHẠM ANH PHƯƠNG
TS. TRẦN VĂN HƯNG

Giáo trình

TOÁN RỜI RẠC



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Nguyễn Đình Lâu (Chủ biên)
Phạm Anh Phương, Trần Văn Hưng

GIÁO TRÌNH
TOÁN RỜI RẠC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

LỜI NÓI ĐẦU

Toán rời rạc là lĩnh vực nghiên cứu các đối tượng rời rạc để giải quyết các bài toán đếm các đối tượng, liệt kê các đối tượng rời rạc, nghiên cứu các mối quan hệ giữa các tập hợp, phân tích các quá trình hữu hạn. Bản chất của việc cất giữ, lưu trữ và xử lý thông tin trên máy tính là quá trình rời rạc.

Boole là một trong những nhà khoa học tiên phong nghiên cứu cơ chế biểu diễn quá trình tư duy lôgic. Năm 1854 ông viết cuốn *Các quy luật tư duy*. Đóng góp lớn nhất của Boole là phát triển lý thuyết lôgic bằng ký hiệu thay cho từ ngữ và có thể sử dụng đại số Boole, hàm Boole để thiết kế mạch tổ hợp, từ đó nghiên cứu mạch điện.

Đồ thị là một cấu trúc rời rạc gồm các đỉnh và các cung nối các đỉnh đó. Đây là công cụ hữu hiệu để mô hình hóa và giải quyết các bài toán trong nhiều lĩnh vực khoa học, kỹ thuật, kinh tế, xã hội,... Chẳng hạn, đồ thị có thể sử dụng để xác định các mạch vòng trong các vấn đề giải tích mạch điện. Chúng ta có thể phân biệt các hợp chất hóa học hữu cơ khác nhau với cùng công thức phân tử nhưng khác nhau cấu trúc phân tử nhờ đồ thị. Chúng ta có thể xác định xem hai máy tính trong mạng có thể trao đổi thông tin được với nhau hay không nhờ mô hình đồ thị của mạng máy tính. Đồ thị có trọng số trên các cạnh có thể sử dụng để giải các bài toán như tìm đường đi ngắn nhất giữa hai thành phố trong mạng giao thông. Ngoài ra, chúng ta có thể sử dụng đồ thị để giải các bài toán về lập lịch, thời khóa biểu và phân bố tần số cho các trạm phát thanh và truyền hình. Những tư tưởng cơ bản của lý thuyết đồ thị được đề xuất vào những năm đầu của thế kỷ 18 bởi nhà toán học lỗi lạc người Thụy Sĩ Leonhard Euler. Chính ông là người đã sử dụng đồ thị để giải bài toán nổi tiếng về các cây cầu ở thành phố Königsberg.

Giáo trình Toán rời rạc được biên soạn nhằm giới thiệu các kiến thức cơ bản trong ba lĩnh vực có nhiều ứng dụng của toán rời rạc. Lĩnh vực thứ nhất tập trung nghiên cứu về thuật toán, độ phức tạp của thuật toán, công thức truy hồi, quy nạp toán học, lý thuyết tổ hợp, các nguyên lý trong tổ hợp, các bài toán đếm, các bài toán tồn tại và các

bài toán liệt kê. Lĩnh vực thứ hai tập trung nghiên cứu về hàm đại số logic, đại số Boole, biểu diễn hàm Boole, xây dựng các mạch tổ hợp cũng như cực tiểu hóa các mạch tổ hợp để thiết kế được các mạch tổ hợp. Lĩnh vực thứ ba là lý thuyết đồ thị tập trung nghiên cứu về các khái niệm đồ thị, biểu diễn đồ thị, đồ thị Hamilton, đồ thị Euler, các bài toán về đường đi và các bài toán về cây phủ,...

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn các đồng nghiệp, các nhà khoa học đã động viên và góp ý cho Giáo trình Toán rời rạc này và lời cảm ơn đặc biệt xin dành cho Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng, Khoa Tin học về sự giúp đỡ quý báu và điều kiện thuận lợi mà quý vị dành cho chúng tôi. Nhóm tác giả mong nhận được sự góp ý của các đồng nghiệp và độc giả để giáo trình được hoàn thiện hơn trong những lần tái bản sau.

Thay mặt nhóm tác giả

Nguyễn Đình Lâu

MỤC LỤC

Lời nói đầu	ii
Mục lục	iv
Danh mục Hình	vi
Danh mục Bảng	x
Chương 1. CÁC KIẾN THỨC CƠ SỞ	1
1.1 Thuật toán.....	1
1.2 Quy nạp toán học và đệ quy	9
Bài tập Chương 1.....	14
Chương 2. BÀI TOÁN ĐẾM	16
2.1 Tập hợp.....	16
2.2 Các nguyên lý đếm cơ bản	18
2.3 Giải tích tổ hợp.....	22
2.4 Hệ thức truy hồi.....	26
Bài tập Chương 2.....	29
Chương 3. BÀI TOÁN TỒN TẠI	32
3.1 Giới thiệu một số bài toán tồn tại	32
3.2 Nguyên lý Dirichlet.....	36
Bài tập chương 3	38
Chương 4. BÀI TOÁN LIỆT KÊ	39
4.1 Phát biểu bài toán	39
4.2 Phương pháp sinh	40
4.3 Các thuật toán về phương pháp sinh	41
4.4 Phương pháp quay lui.....	65

4.5 Các thuật toán về phương pháp quay lui	67
Bài tập Chương 4.....	72
Chương 5. TỐI ƯU MẠCH TỔ HỢP	74
5.1 Đại số Boole	74
5.2 Biểu diễn hàm Boole	77
5.3 Mạch tổ hợp.....	89
5.4 Cực tiểu hóa mạch tổ hợp.....	92
Bài tập Chương 5.....	100
Chương 6. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ	104
6.1 Các khái niệm cơ bản	104
6.2 Biểu diễn đồ thị	114
6.3 Đồ thị đẳng cấu	118
6.4 Đồ thị phẳng	120
Bài tập Chương 6.....	121
Chương 7. CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG ĐI	124
7.1 Đồ thị Euler	124
7.2 Tìm đường đi ngắn nhất	135
7.3 Đồ thị Hamilton.....	158
Bài tập Chương 7.....	165
Chương 8. CÂY	171
8.1 Các khái niệm cơ bản	171
8.2 Cây phủ	177
8.3 Cây phủ nhỏ nhất.....	188
8.4 Cây nhị phân tìm kiếm	199
Bài tập Chương 8	204
Tài liệu tham khảo	206

DANH MỤC HÌNH

Hình 1.1	Sơ đồ khối của thuật toán giải phương trình bậc 2	3
Hình 1.2	Sơ đồ khối của thuật toán tìm số lớn nhất của dãy số.....	4
Hình 3.1	Bài toán 19 hình lục giác thần bí	34
Hình 4.1	Sơ đồ khối thuật toán liệt kê dãy kế tiếp.....	43
Hình 4.2	Sơ đồ khối liệt kê tổ hợp chập r của n phần tử.....	48
Hình 4.3	Sơ đồ khối liệt kê hoán vị	53
Hình 4.4	Mô tả thuật toán quay lui	66
Hình 4.5	Quay lui liệt kê dãy nhị phân $n=3$	68
Hình 4.6	Mô tả thuật toán quay lui liệt kê dãy hoán vị với $n=3$	70
Hình 4.7	Mô tả thuật toán quay lui liệt kê dãy tổ hợp chập $r=3$ của $n=4$	72
Hình 5.1	Mạch tổ hợp u chưa xác định.....	91
Hình 5.2	Mạch tổ hợp u đã xác định.....	91
Hình 5.3	Mạch tổ hợp bước 1	91
Hình 5.4	Mạch tổ hợp bước 2	91
Hình 5.5	Mạch tổ hợp bước 3	92
Hình 5.6	Mạch tổ hợp bước 4	92
Hình 5.7	Mạch tổ hợp bước 5	92
Hình 5.8	Mạch tổ hợp ứng với lời giải	93
Hình 5.9	Mạch tổ hợp rút gọn.....	94
Hình 6.1	Đồ thị 2 đỉnh 1 cạnh.....	104
Hình 6.2	Đồ thị 4 đỉnh 7 cạnh.....	104

Hình 6.3	Đồ thị có hướng 2 đỉnh 1 cung	105
Hình 6.4.	Đồ thị có hướng 6 đỉnh 8 cung	105
Hình 6.5	Đồ thị đơn	106
Hình 6.6	Đồ thị vô hướng 7 đỉnh	107
Hình 6.7	Đồ thị có hướng 6 đỉnh	107
Hình 6.8	Đồ thị K_5	108
Hình 6.9	Đồ thị vô hướng 7 đỉnh	109
Hình 6.10	Đồ thị gán trọng số.....	111
Hình 6.11	Các thành phần liên thông.....	112
Hình 6.12	Đồ thị G_1 và G_2 có trọng số bằng 1	113
Hình 6.13	Đồ thị vô hướng 5 đỉnh	114
Hình 6.14	Đồ thị có hướng 6 đỉnh	115
Hình 6.15	Đồ thị vô hướng có trọng số	116
Hình 6.16	Đồ thị vô hướng có cạnh liên thuộc	117
Hình 6.17	Đồ thị có hướng có cung liên thuộc	118
Hình 6.18	Hai đồ thị đẳng cấu	118
Hình 6.19	Hai đồ thị đẳng cấu G_1 và G_2	119
Hình 6.20	Đồ thị phẳng.....	120
Hình 7.1	Biểu diễn chu trình Euler	124
Hình 7.2	Biểu diễn đường đi Euler	125
Hình 7.3	Đồ thị không có chu trình và đường đi Euler	125
Hình 7.4	Đồ thị 1 đỉnh và 1 khuyên.....	126
Hình 7.5	Đồ thị 8 đỉnh	127
Hình 7.6	Đồ thị 9 đỉnh	128

Hình 7.7	Đồ thị có hướng 4 đỉnh	128
Hình 7.8	Sơ đồ khối cho thuật toán tìm chu trình Euler	130
Hình 7.9	Đồ thị thanh mã tấu Mohammed	131
Hình 7.10	Đồ thị thanh mã tấu Mohammed đã xóa chu trình	131
Hình 7.11	Đồ thị thanh mã tấu Mohammed đã xóa đỉnh.....	132
Hình 7.12	Đồ thị 6 đỉnh	133
Hình 7.13	Sơ đồ thuật toán Dijkstra	137
Hình 7.14	Đồ thị có hướng 4 đỉnh	138
Hình 7.15	Đồ thị gán nhãn khởi tạo.....	139
Hình 7.16	Đồ thị gán nhãn bước 1	140
Hình 7.17	Đồ thị gán nhãn bước 2.....	141
Hình 7.18	Đồ thị gán nhãn bước 3.....	142
Hình 7.19	Đồ thị có hướng 12 đỉnh	143
Hình 7.20	Đồ thị có hướng 12 đỉnh đã gán nhãn.....	144
Hình 7.21	Đồ thị dùng lập bảng.....	145
Hình 7.22	Đồ thị biểu diễn thuật toán Floyd	147
Hình 7.23	Đồ thị biểu diễn thuật toán Floyd mở rộng.....	150
Hình 7.24	Đồ thị biểu diễn chu trình Hamilton	158
Hình 7.25	Đồ thị G_1 và G_2	160
Hình 7.26	Đồ thị xếp chỗ ngồi lần 1	161
Hình 7.27	Đồ thị xếp chỗ ngồi lần 2.....	161
Hình 7.28	Đồ thị xếp chỗ ngồi lần 3.....	161
Hình 7.29	Đồ thị xếp chỗ ngồi lần 4.....	162
Hình 7.30	Đồ thị xếp chỗ ngồi lần 5.....	162

Hình 7.31 Khối cấp 3	164
Hình 8.1 Cây có 11 đỉnh	171
Hình 8.2 Cây có 2 thành phần liên thông (rừng)	173
Hình 8.3 Cây tam phân	175
Hình 8.4 Cây tam phân đầy đủ cân bằng	175
Hình 8.5 Cây có 13 đỉnh	178
Hình 8.6 Cây có 13 đỉnh tìm theo chiều sâu	182
Hình 8.7 Sơ đồ khối thuật toán Prim	189
Hình 8.8 Đồ thị biểu diễn thuật toán Prim	190
Hình 8.9 Sơ đồ khối thuật toán Kruskal	194
Hình 8.10 Đồ thị biểu diễn thuật toán Kruskal	195
Hình 8.11 Cây nhị phân	199
Hình 8.12 Cây nhị phân có các nút là các chữ cái	200
Hình 8.13 Cây nhị phân có các nút là các số	203
Hình 8.14 Cây nhị phân tìm kiếm	204

DANH MỤC BẢNG

Bảng 3.1 Bài toán 36 số quan với $n=4$	32
Bảng 3.2 Bài toán 36 số quan với $n=5$	33
Bảng 3.3 Bài toán $2n$ điểm (với $n=12$).....	34
Bảng 4.1 Phép thế, dãy nghịch thế và dãy nghịch thế ngược với $n=3$	61
Bảng 4.2 Biểu diễn các dãy bị chặn t và t'	63
Bảng 5.1 Biểu diễn hàm f	77
Bảng 5.2 Bảng giá trị của hàm $f(x,y,z)$	78
Bảng 5.3 Bảng giá trị của hàm $f(x,y,z,t)$	79
Bảng 5.4 Biểu diễn các hàm $f(x,y,z)$ và $g(x,y,z)$	90
Bảng 5.5 Biểu diễn giá trị hàm $f(x,y,z,t)$	81
Bảng 5.6 Giá trị của hàm $f = (x + y) \cdot \bar{z}$	83
Bảng 5.7 Giá trị của hàm $f(x,y,z,t) = \bar{x} \cdot y + \bar{z} \cdot t$	84
Bảng 5.8 Giá trị của hàm $f(x, y, z) = (x + y) \cdot \bar{z}$	87
Bảng 5.1 Giá trị của hàm $f(x,y,z,t) = \bar{x} \cdot y + \bar{z} \cdot t$	88
Bảng 5.10 Bảng chân trị của f	93
Bảng 5.11 Bản đồ Karnaugh 2 biến.....	95
Bảng 5.12 Bản đồ Karnaugh a.....	95
Bảng 5.13 Bản đồ Karnaugh b.....	96
Bảng 5.14 Bản đồ Karnaugh c.....	96
Bảng 5.15 Bản đồ Karnaugh đánh dấu a.....	96
Bảng 5.16 Bản đồ Karnaugh đánh dấu b.....	96
Bảng 5.17 Bản đồ Karnaugh đánh dấu c.....	97
Bảng 5.18 Bản đồ Karnaugh 4 biến.....	97

Bảng 5.19 Bản đồ Karnaugh 3 biến a	98
Bảng 5.20 Bản đồ Karnaugh 3 biến b	98
Bảng 5.21 Bản đồ Karnaugh 3 biến c	98
Bảng 5.22 Bản đồ Karnaugh 3 biến d	98
Bảng 5.23 Bản đồ Karnaugh 3 biến e	99
Bảng 5.24 Bản đồ Karnaugh 3 biến đánh dấu a.....	99
Bảng 5.25 Bản đồ Karnaugh 3 biến đánh dấu b.....	100
Bảng 5.26 Bản đồ Karnaugh 3 biến đánh dấu c.....	100
Bảng 6.1 Ma trận kề của đồ thị vô hướng.....	114
Bảng 6.2 Ma trận kề của đồ thị có hướng	115
Bảng 6.3 Ma trận trọng số của đồ thị.....	116
Bảng 6.4 Ma trận liên thuộc của đồ thị vô hướng.....	117
Bảng 6.5 Ma trận liên thuộc của đồ thị có hướng.....	118
Bảng 7.1 Tính đường đi ngắn nhất.....	145
Bảng 7.2 Ma trận D_0 cho thuật toán Floyd.....	147
Bảng 7.3 Ma trận D_1 cho thuật toán Floyd.....	147
Bảng 7.4 Ma trận D_2 cho thuật toán Floyd.....	148
Bảng 7.5 Ma trận D_3 cho thuật toán Floyd.....	148
Bảng 7.6 Ma trận D_4 cho thuật toán Floyd.....	148
Bảng 7.7 Ma trận D_0, P_0 cho thuật toán Floyd mở rộng.....	151
Bảng 7.8 Ma trận D_1, P_1 cho thuật toán Floyd mở rộng.....	151
Bảng 7.9 Ma trận D_2, P_2 cho thuật toán Floyd mở rộng.....	151
Bảng 7.10 Ma trận D_3, P_3 cho thuật toán Floyd mở rộng.....	152
Bảng 7.11 Ma trận D_4, P_4 cho thuật toán Floyd mở rộng.....	152