ĐIỀU KIỆN HỮU HIỆU CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU KHÔNG LỒI THÔNG QUA ĐẠO HÀM TRÊN

EFFICIENCY CONDITIONS FOR NONCONVEX OPTIMIZATION PROBLEMS VIA EPIDERIVATIVES

Nguyễn Thị Hải Yến[1]*, Trần Hoàng Tiến Thành[2]

[1]Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, Việt Nam

[2]Học viên cao học, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, Việt Nam

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: nthyen_kt@ ued.udn.vn

(Nhận bài / Received: 19/9/2024; Sửa bài / Revised: 29/10/2024; Chấp nhận đăng / Accepted: 05/11/2024)

Tóm tắt - Bài báo này nghiên cứu điều kiện hữu hiệu cần và điều kiện hữu hiệu đủ cho nghiệm cực tiểu toàn cục của bài toán tối ưu không lồi (P) có điều kiện bao gồm ràng buộc bất đẳng thức và ràng buộc tập thông qua các đạo hàm trên. Một điều kiện chính quy được giới thiệu cho việc xây dựng điều kiện tối ưu kiểu Kuhn Tucker (KT). Ngoài ra, nhóm tác giả xây dựng mô hình đối ngẫu dạng max cho bài toán gốc (P) bằng cách sử dụng khái niệm đạo hàm trên. Bằng cách áp dụng các điều kiện hữu hiệu cần và đủ cho nghiệm cực tiểu toàn cục của bài toán gốc (P), nhóm tác giả phân tích các định lí về tính đối ngẫu mạnh và tính đối ngẫu yếu của cặp bài toán gốc-đối ngẫu thông qua đạo hàm trên. Các ví dụ minh họa cũng được đề xuất trong bài báo này.

Từ khóa - Bài toán tối ưu không lồi; đối ngẫu; đạo hàm trên; điều kiện chính quy; nghiệm tối ưu.

Abstract - This paper is to study necessary efficiency condition and sufficient efficiency condition for a nonconvex optimization problem (P) with conditions involving inequality constraint and set of constraints in terms of epiderivatives. A regularity condition is introduced. Under this regularity condition Kuhn Tucker type (KT-type) optimality conditions are formulated. Moreover, the authors construct a dual model of the max type through the epiderivatives notion for the primal problem (P). Using necessary efficiency condition and sufficient efficiency condition for a nonconvex optimization problem (P), the authors also explore weak duality theorem and strong duality theorem for the dual-primal problem pair via the epiderivatives. Illustrative examples demonstrates the benefits of our findings.

Key words - Nonconvex optimization problems; duality; epiderivatives; regularity condition; optimal solution.

1. Đặt vấn đề

Đạo hàm trên là một trong những công cụ hiệu quả được áp dụng để nghiên cứu đặc trưng cơ bản cho lớp hàm không lồi và điều kiện tối ưu cho lớp các bài toán tối ưu không lồi. Đạo hàm trên được giới thiệu trong tài liệu [1] và hiện nay đang được nhiều nhà khoa học trong nước và quốc tế quan tâm áp dụng [2, 3, 4, 5]. Chẳng hạn, Jiménez và Novo [2] sử dụng đạo hàm trên để nghiên cứu đặc trưng của đạo hàm theo hướng đa trị không có cấu trúc và áp dụng chúng để thiết lập điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu véctơ tổng quát có điều kiện, Yalcin và Kasimbeyli [3] sử dụng đạo hàm trên để nghiên cứu đạo hàm trên Radial và điều kiện tối ưu cho lớp bài toán tối ưu không lồi. Tinh [4, 5] sử dụng đạo hàm trên để nghiên cứu đạo hàm trên Hadamard suy rộng và áp dụng trong việc xây dựng điều kiện tối ưu cho lớp bài toán véctơ không trơn và không lồi,…

Bài toán tối ưu đơn mục tiêu là đối tượng nghiên cứu lâu đời nhất bởi vì nó có nguồn gốc từ các nhu cầu thực tế liên quan đến tính hiệu quả của công việc, tính hiệu quả trong các mô hình sản xuất, kinh doanh, … và hiện nay bài toán này đang được quan tâm nghiên cứu trong cả hai khía cạnh đó là: hàm mục tiêu (hay ràng buộc) lồi và hàm mục tiêu (hay ràng buộc) không lồi. Ở khía cạnh đầu tiên, hiện tại đã đạt được các kết quả gần như là hoàn thiện. Ở khía cạnh còn lại, vẫn có rất ít kết quả do đối tượng không lồi đòi hỏi phải có kiến thức hỗ trợ phù hợp. Đây là lý do để nhóm tác giả tiến hành nghiên cứu điều kiện hữu hiệu cần và đủ cho bài toán tối ưu không lồi có điều kiện và áp dụng trong công việc xây dựng mô hình toán đối ngẫu.

Xây dựng mô hình toán học dạng đối ngẫu là cần thiết đối với lý thuyết tối ưu hóa bởi vì tính đối ngẫu yếu cung cấp cho chúng ta tính bị chặn của hàm mục tiêu. Ngoài ra, khi giải một bài toán tối ưu, nhiều khi bài toán gốc khó giải nhưng giải trực tiếp trên mô hình đối ngẫu lại khá dễ dàng. Từ mối quan hệ mạnh và yếu về cặp bài toán gốc – đối ngẫu, việc tìm nghiệm bài toán này suy ra nghiệm bài toán còn lại khá tiện lợi. Điều này được thể hiện khá rõ trong lý thuyết quy hoạch tuyến tính và tối ưu hóa.

Bài toán tối ưu mà hàm mục tiêu được định nghĩa là "max" của một số hữu hạn hàm cho trước có nguồn gốc từ bài toán quy hoạch minimax [6] là đối tượng nghiên cứu trong bài báo này bởi tính ứng dụng của bài toán đối với lý thuyết tối ưu mạnh [7]. Sử dụng công cụ đạo hàm trên, nhóm tác giả nghiên cứu điều kiện cần và đủ hữu hiệu của bài toán này cùng với một vài áp dụng trong xây dựng mô hình đối ngẫu.

Cho tập lồi $C \subseteq \mathbb{R}^n, f = (f_1, f_2, \dots, f_p): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ và $g = (g_1, g_2, \dots, g_m): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

[1] The University of Danang – University of Science and Education, Vietnam (Nguyen Thi Hai Yen)

[2] Master's Student, Faculty of Mathematics, The University of Danang – University of Science and Education, Vietnam (Tran Hoang Tien Thanh)

Xét hàm số $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$F(x) = \max\{(f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)\}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Với mỗi véctơ $x \in \mathbb{R}^n$ và các tập chỉ số $I_p = \{1, 2, \dots, p\}$, $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$, ta định nghĩa

$$I(x) = \{i \in I_p \mid f_i(x) = F(x)\}$$

và $$J(x) = \{j \in I_m \mid g_j(x) = 0\}.$$

Hàm F được gọi là hàm max bởi vì giá trị của hàm số được mô tả thông qua giá trị lớn nhất của các thành phần trong hàm f cho trước.

Xét bài toán tối ưu không lồi (P) có điều kiện sau:

$$\min_{x \in K} F(x), (P)$$

Trong đó, K là tập các điểm chấp nhận được của bài toán (P) được mô tả như sau

$$K := \{x \in C \mid g_i(x) \leq 0, i \in I_m\}.$$

Bài toán tối ưu có điều kiện là các ràng buộc bất đẳng thức với hàm mục tiêu là max của các thành phần trong hàm véctơ f thông qua khái niệm đạo hàm trên là đối tượng khá mới và hiện nay vẫn chưa được nghiên cứu. Với nhận xét này thì việc đưa ra điều kiện cần và đủ tối ưu cho bài toán (P) có ý nghĩa về mặt khoa học, có tính thời sự và có tính ứng dụng để xây dựng mô hình toán trong tương lai.

2. Kiến thức phụ trợ

Phần này cung cấp các khái niệm và một số ký hiệu cần thiết phục vụ cho nghiên cứu trong các tiểu mục tiếp theo.

Không gian Euclide n-chiều với chuẩn Euclide thông thường $\|.\|$, nghĩa là với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x^T x}$, trong đó x^T ký hiệu ma trận cột của x.

Tập không chứa phần tử nào trong $\mathbb{R}^n$ ký hiệu $\emptyset$.

Cho A là một tập lồi. Điểm $a \in A$ được gọi là điểm trong tương đối nếu với mọi $x \in A$ đều có một số $\alpha > 0$ sao cho $a + \alpha(x - a) \in A$. Tập các điểm trong tương đối của A được kí hiệu là riA, cũng là tập lồi. Vì tập C lồi nên theo định nghĩa phần trong tương đối, $riC \neq \emptyset$.

Nhắc lại là miền hữu hiệu của hàm số thực mở rộng r xác định trên tập con $E \subseteq \mathbb{R}^n$ được kí hiệu dom r và được xác định bởi dom $r = \{x \in E : r(x) < +\infty\}$.

Định nghĩa 2.1. **(***Nghiệm tối ưu***)** Xét bài toán (P).

(i) Điểm $\bar{x} \in K$ được gọi là nghiệm cực tiểu địa phương của bài toán (P) nếu tồn tại lân cận N của $\bar{x}$ thỏa mãn

$$F(\bar{x}) \leq F(x), \forall x \in K \cap N. \quad (1)$$

(ii) Nếu (1) thỏa mãn với mọi điểm $x \in K$ thì $\bar{x} \in K$ được gọi là nghiệm cực tiểu toàn cục của bài toán (P).

Chú ý: Khái niệm nghiệm cực đại (hay cực đại địa phương) được định nghĩa đối ngẫu.

Nhắc lại rằng, hàm F được gọi là ổn định tại $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ nếu tồn tại một lân cận U của $\bar{x}$ và một số thực dương T (gọi là hằng số ổn định) sao cho $|F(x) - F(\bar{x})| \leq T\|x - \bar{x}\|$ với mọi $x \in U$.

Định nghĩa 2.2. ([1]) (*Đạo hàm trên và đạo hàm Hadamard*) Cho $\bar{x}, v \in \mathbb{R}^n$ và hàm số thực mở rộng $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Đạo hàm trên của L tại điểm $(\bar{x}, v)$ được định nghĩa bởi

$$dL(\bar{x}, v) = \liminf_{(t,u)\to(0^+,v)} \frac{L(\bar{x}+tu) - L(\bar{x})}{t}.$$

Đạo hàm Hadamard của L tại điểm $(\bar{x}, v)$ được định nghĩa bởi

$$d_H L(\bar{x}, v) = \lim_{(t,u)\to(0^+,v)} \frac{L(\bar{x}+tu) - L(\bar{x})}{t}.$$

Chú ý rằng nếu L là ổn định tại $\bar{x}$ thì L có đạo hàm trên hữu hạn (xem [2]).

Định nghĩa 2.3. ([1]) Cho $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ và hàm số thực mở rộng $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Ta nói L là hàm giả lồi tại điểm $\bar{x}$ nếu với bất kỳ điểm $x \in \mathbb{R}^n$ ta luôn có bất đẳng thức

$$dL(\bar{x}, x - \bar{x}) \leq L(x) - L(\bar{x}).$$

Ta nói L là giả lồi trên C nếu L là giả lồi tại mọi điểm $\bar{x}$ thuộc C.

Chú ý rằng nếu L là hàm lồi trên C thì L là giả lồi trên C. Thật vậy, với bất kỳ $x \in C, t > 0$, ta luôn có

$$L(\bar{x} + t(x - \bar{x})) - L(\bar{x}) \leq t\big(L(x) - L(\bar{x})\big).$$

Chia 2 vế cho $t > 0$ và sau đó dựa vào định nghĩa đạo hàm trên ta lấy liminf vế trái và suy ra

$$dL(\bar{x}, x - \bar{x}) \leq L(x) - L(\bar{x}).$$

Tiếp theo nhóm tác giả đề xuất khái niệm chính quy sau:

Định nghĩa 2.4. **(***Điều kiện chính quy***)** Cho điểm $\bar{x} \in K$. Ta nói rằng điều kiện chính quy (RC) của bài toán (P) được thỏa mãn tại điểm $\bar{x}$ nếu quan hệ sau đúng:

$$\bigcap_{j \in J(\bar{x})} \{v \in \mathbb{R}^n \mid dg_j(\bar{x}, v) < 0\} \bigcap (C - \bar{x}) \neq \emptyset.$$

Từ chỗ này trở đi, ta luôn giả thiết rằng với mọi chỉ số $j \notin J(\bar{x})$, các hàm ràng buộc bất đẳng thức g_j là hàm số liên tục tại điểm $\bar{x}$.

Định lí 2.1 ([8, Theorem 21.1]) Cho C là tập lồi và $f_1, f_2, \dots, f_m$ là các hàm lồi chính thường thỏa mãn ri $C \subset$ dom f_i. Khi đó, chỉ có một trong hai phát biểu sau đây đúng:

(a) Tồn tại $x \in C$ sao cho $f_i(x) < 0, \forall i = 1, 2, \dots, m$.

(b) Tồn tại các số thực $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ không âm và không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_m f_m(x) \geq 0, \forall x \in C.$$

Định nghĩa 2.5 ([8])

(i) Hàm f xác định trên $\mathbb{R}^n$ được gọi là thuần nhất dương, nếu với mọi x, $f(tx) = tf(x), 0 < t < +\infty$.

(ii) Hàm f xác định trên $\mathbb{R}^n$ được gọi là dưới cộng tính, nếu $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$.

3. Điều kiện hữu hiệu cho bài toán (P)

Phần này nghiên cứu điều kiện hữu hiệu cần và điều kiện hữu hiệu đủ cho nghiệm cực tiểu của bài toán (P) thông qua khái niệm đạo hàm trên.

Điều kiện hữu hiệu cần cho nghiệm cực tiểu địa phương của bài toán (P) và hiển nhiên cũng đúng cho cả nghiệm cực tiểu toàn cục và được phát biểu như sau:

Định lí 3.1. Cho điểm $\bar{x} \in K$ là nghiệm cực tiểu địa phương của bài toán (P). Giả sử rằng điều kiện chính quy (RC) trong Định nghĩa 2.4 được thỏa mãn tại $\bar{x}$, các đạo hàm trên của f_i $(i \in I_p)$ và đạo hàm Hadamard của g_j $(j \in J(\bar{x}))$ hữu hạn và các hàm ràng buộc bất đẳng thức g_j $(j \notin J(\bar{x}))$ liên tục tại điểm $\bar{x}$. Hơn nữa, ta giả sử rằng các $df_j(\bar{x}, v), d_H g_i(\bar{x}, v)$ với $j \in I_p, i \in J(\bar{x})$ dưới cộng tính và thỏa mãn ri $C \subset$ dom df_j, $j \in I_p$, ri $C \subset$ dom $d_H g_i, i \in J(\bar{x})$. Khi đó, tồn tại các nhân tử Lagrange $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p_+$, trong đó $\lambda_j = 0$ với mọi $j \notin I(\bar{x})$ mà $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$ và $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m_+$, với $\mu_i = 0$ với mọi $i \notin J(\bar{x})$, sao cho

$$min_{v \in C - \bar{x}} \left(\sum_{j=1}^p \lambda_j df_j(\bar{x}, v) + \sum_{i=1}^m \mu_i dg_i(\bar{x}, v) \right) \geq 0.$$

Chứng minh. Ta có đạo hàm trên của hàm mục tiêu $F(x)$ cũng nhận giá trị hữu hạn tại nghiệm cực tiểu địa phương $\bar{x} \in K$ bởi vì các đạo hàm trên của f_i $(i \in I_p)$ là hữu hạn tại nghiệm này (xem [1, Section 6.1.4]). Để ý rằng hệ (H1) sau đây không có nghiệm $v \in C - \bar{x}$:

$$\begin{cases} dF(\bar{x}, v) < 0, \\ d_H g_i(\bar{x}, v) < 0, i \in J(\bar{x}). \end{cases}$$

Thật vậy, giả sử ngược lại, hệ (H1) có nghiệm $v \in C - \bar{x}$. Theo định nghĩa đạo hàm trên của F tại điểm $(\bar{x}, v)$, ta có

$$\begin{aligned} dF(\bar{x}, v) &= \liminf_{(t,u) \to (0^+, v)} \frac{F(\bar{x} + tu) - F(\bar{x})}{t} \\ &= \lim_{\substack{\exists\, (t_n, v_n) \to (0^+, v) \text{ thỏa mãn} \\ \bar{x} + t_n v_n \in C, n \in \mathbb{N}^*}} \frac{F(\bar{x} + t_n v_n) - F(\bar{x})}{t_n} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Do đó, với mỗi chỉ số $i \in J(\bar{x})$ và $v \in \mathbb{R}^n$, theo định nghĩa liminf, luôn tồn tại dãy $(t_n, v_n) \to (0^+, v)$ với $\bar{x} + t_n v_n \in C, n \in \mathbb{N}^*$ và n đủ lớn được lấy trong giới hạn trên ta cũng có

$$\begin{aligned} d_H g_i(\bar{x}, v) &= \lim_{(t,u) \to (0^+, v)} \frac{g_i(\bar{x} + tu) - g_i(\bar{x})}{t} \\ &= \lim_{\substack{(t_n, v_n) \to (0^+, v) \\ \bar{x} + t_n v_n \in C, n \in N^*}} \frac{g_i(\bar{x} + t_n v_n) - g_i(\bar{x})}{t_n} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Vì $i \in J(\bar{x}), g_i(\bar{x}) = 0$ nên từ đó không mất tính tổng quát ta có thể xem $g_i(\bar{x} + t_n v_n) < 0, n \in \mathbb{N}^*$ đủ lớn và mọi $i \in J(\bar{x})$. Mặt khác, theo giả thiết với mọi chỉ số $i \notin J(\bar{x})$, các hàm g_i liên tục tại $\bar{x}$ nên với mọi n đủ lớn ta có

$$g_i(\bar{x} + t_n v_n) < 0, i \in I_m.$$

Theo định nghĩa với mọi n đủ lớn, tồn tại một lân cận mở N của điểm $\bar{x}$ thỏa mãn đồng thời

$$\bar{x} + t_n v_n \in K \cap N \text{ và } F(\bar{x} + t_n v_n) - F(\bar{x}) < 0.$$

Suy ra $\bar{x} \in K$ không phải là cực tiểu địa phương của bài toán (P). Vậy hệ (H1) không có nghiệm $v \in C - \bar{x}$.

Hơn nữa, nhờ tính thuần nhất dương của đạo hàm trên hữu hạn tại $\bar{x}$ nên từ giả thiết tính chất dưới cộng tính của chúng, ta được $df_j(\bar{x}, v), d_H g_i(\bar{x}, v)$ với $j \in I_p, i \in J(\bar{x})$ là các hàm lồi. Từ đó, do điều kiện chính quy (RC) đúng tại điểm $\bar{x}$ nên áp dụng Định lí 2.1, tồn tại các nhân tử Lagrange $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p_+$, trong đó $\lambda_j = 0$, $\forall j \notin I(\bar{x})$ thỏa mãn $\sum_{j=1}^p \lambda_j > 0$ và $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m_+$ với $\mu_i = 0, \forall i \notin J(\bar{x})$ sao cho với mọi $v \in C - \bar{x}$, bất đẳng thức sau đúng:

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j df_j(\bar{x}, v) + \sum_{i=1}^m \mu_i d_H g_i(\bar{x}, v) \geq 0. \quad (2)$$

Do $\sum_{j=1}^p \lambda_j > 0$ nên ta có thể chọn $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$. Từ đây và bất đẳng thức (2) ta suy ra

$$min_{v \in C - \bar{x}} \left(\sum_{j=1}^p \lambda_j df_j(\bar{x}, v) + \sum_{i=1}^m \mu_i d_H g_i(\bar{x}, v) \right) \geq 0.$$

Để ý là nếu hàm có đạo hàm Hadamard thì đạo hàm trên trùng với đạo hàm Hadamard nên định lí được chứng minh. ■

Chú ý có nhiều lớp hàm không lồi có đạo hàm trên thuần nhất, dưới cộng tính. Chẳng hạn, xét hàm số thực f xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} |x|(2 - sin\dfrac{2024}{x}), \text{khi } x \neq 0, \\ 0, \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

Chọn $\bar{x} = 0$ và bất kì $v \in \mathbb{R}$, dùng định nghĩa đạo hàm trên và chú ý là $2 - sin\frac{2024}{x} \geq 1$ $(x \neq 0)$, ta tính được $df(\bar{x}, v) = |v|$. Do đó, đạo hàm trên $df(\bar{x}, .): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuần nhất dương và dưới cộng tính.

Một điều kiện hữu hiệu đủ cho nghiệm cực tiểu toàn cục của bài toán (P) được phát biểu như sau:

Định lí 3.2. Cho $\bar{x} \in K$ và giả sử rằng f_j $(j \in I_p)$, g_i $(i \in J(\bar{x}))$ là các hàm giả lồi tại $\bar{x}$. Nếu tồn tại các nhân tử Lagrange $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p_+$, trong đó $\lambda_j = 0$ với mọi $j \notin I(\bar{x})$ và $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$ và $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m_+$, trong đó $\mu_i = 0$ với mọi $i \notin J(\bar{x})$ sao cho

$$min_{v \in K - \bar{x}} \left(\sum_{j=1}^p \lambda_j df_j(\bar{x}, v) + \sum_{i=1}^m \mu_i dg_i(\bar{x}, v) \right) \geq 0$$

thì $\bar{x}$ là nghiệm cực tiểu của bài toán (P).

Chứng minh. Theo giả thiết, các hàm thực mở rộng f_j $(j \in I_p)$ là giả lồi tại điểm $\bar{x} \in K$ và tồn tại nhân tử Lagrange $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p_+$, trong đó $\lambda_j = 0$ với mọi $j \notin I(\bar{x})$ và $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$, vì thế, với mọi $x \in K$, ta có $df_j(\bar{x}, x - \bar{x}) \leq f_j(x) - f_j(\bar{x})$. Do đó,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \lambda_j df_j(\bar{x}, x - \bar{x})) &\leq \sum_{j=1}^p \lambda_j (f_j(x) - f_j(\bar{x})) \\ &= \sum_{j \in I(\bar{x})} \lambda_j (f_j(x) - f_j(\bar{x})) \\ &\leq \sum_{j \in I(\bar{x})} \lambda_j (\max\{f_j(x) : j \in I(\bar{x})\} - f_j(\bar{x})) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j\in I(\bar{x})} \lambda_j(\max\{f_j(x): j = 1,2,\dots,p\} - F(\bar{x}))$$

$$= \sum_{j\in I(\bar{x})} \lambda_j\big(F(x) - F(\bar{x})\big) = F(x) - F(\bar{x}). \quad (3)$$

Mặt khác, do các hàm ràng buộc g_i $\big(i \in J(\bar{x})\big)$ giả lồi tại $\bar{x}$ và $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m_+$, với $\mu_i = 0$ với mọi $i \notin J(\bar{x})$ nên $dg_i(\bar{x}, x - \bar{x}) \le g_i(x) - g_i(\bar{x}), \forall x \in K$.

Vì vậy, với mọi $x \in K$, ta có

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i dg_i(\bar{x}, x - \bar{x}) \le \sum_{i=1}^{m} \mu_i\big(g_i(x) - g_i(\bar{x})\big)$$

$$= \sum_{i\in J(\bar{x})} \mu_i\big(g_i(x) - g_i(\bar{x})\big) \le 0.$$

Cộng bất đẳng thức trên với bất đẳng thức (3) vế theo vế, ta được

$$F(x) - F(\bar{x}) \ge \sum_{j=1}^{p} \lambda_j df_j(\bar{x}, x - \bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i dg_i(\bar{x}, x - \bar{x}).$$

Suy ra $F(x) - F(\bar{x}) \ge 0, \forall x \in K$. Vậy, điểm $\bar{x} \in K$ là nghiệm cực tiểu của bài toán (P). ■

Ví dụ 3.3. Xét bài toán tối ưu (P), với $n = 1$, $p = m = 2$, các hàm số thực mở rộng sau

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2\left(\left|sin\dfrac{2024}{x}\right| - 1\right), \text{khi } x \neq 0, \\ 0, \text{khi } x = 0, \end{cases}$$

$f_2(x) = |2024x| - x^2, g_1(x) = 2024x^2 + x - 2025$ và $g_2(x) = 2024(x^2 - x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chọn điểm $\bar{x} = 0$ và tập con lồi $C = [0, +\infty)$. Ta có $K = \{x \in C: 2024x^2 + x - 2025 \le 0, 2024(x^2 - x) \le 0\}$, hay K= $[0,1], F(x) = f_2(x)$, do đó, $I(\bar{x}) = J(\bar{x}) = \{2\}$. Hơn nữa, ta cũng có $df_2(\bar{x}, x - \bar{x}) = |2024x|, d_H g_2(\bar{x}, x - \bar{x}) = -2024x$, với mọi $x \in K$ và $f_1(x), f_2(x), g_2(x)$ giả lồi tại $\bar{x}$.

Chọn $\mu = (\mu_1, \mu_2) \coloneqq (0,1) \in \mathbb{R}^2_+$ và $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \coloneqq (0,1) \in \mathbb{R}^2_+$, ta được

$$min_{v\in K-\bar{x}}\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j df_j(\bar{x}, v) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i d_H g_i(\bar{x}, v)\right)$$

$$= min_{v\in K-\bar{x}}(|2024v| - 2024v) \ge 0.$$

Áp dụng Định lí 3.2, điểm $\bar{x} = 0$ là nghiệm cực tiểu của bài toán (P). Thử lại bằng định nghĩa ta thấy thỏa mãn.

4. Ứng dụng trong mô hình đối ngẫu

Phần này trình bày mô hình đối ngẫu dạng max cho bài toán gốc (P) và phân tích tính đối ngẫu mạnh và tính đối ngẫu yếu cho cặp bài toán gốc (P) và đối ngẫu (D) (bài toán đối ngẫu của bài toán (P)).

Bài toán đối ngẫu dạng max ký hiệu (D) cho bài toán tối ưu min gốc (P) được định nghĩa bởi:

$$\max_{y\in C} F(y) \text{ với điều kiện } (y, \lambda, \mu) \in K(D), \quad (D)$$

trong đó, $F(y) = \max_{i=1,2,\dots,p} f_i(y)$ và $K(D)$ ký hiệu tập nghiệm chấp nhận được của bài toán đối ngẫu (D) và ta định nghĩa $K(D)$ là tập sau:

$$\left\{\begin{array}{c} (\bar{y}, \lambda, \mu) \in C \times \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^m_+ \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j df_j(\bar{y}, v) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i dg_i(\bar{y}, v) \ge 0, \\ \forall v \in C - \bar{y}, \lambda_j = 0 \text{ với mọi } j \notin I(\bar{y}) \text{ và } \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1, \\ \mu_i = 0 \text{ với mọi } i \notin J(\bar{y}). \end{array}\right\}.$$

Định nghĩa 4.1. Một véctơ $(\bar{y}, \lambda, \mu) \in K(D)$ được gọi là nghiệm cực đại toàn cục của bài toán đối ngẫu (D) nếu

$$F(\bar{y}) \ge F(y), \forall\, (y, \lambda, \mu) \in K(D).$$

Định lí 4.1. (Đối ngẫu yếu) Cho các nghiệm chấp nhận được $\bar{x} \in K$ và $(\bar{y}, \lambda, \mu) \in K(D)$. Giả sử rằng các hàm f_j $(j \in I(\bar{y})), g_i$ $\big(i \in J(\bar{y})\big)$ giả lồi tại điểm $\bar{y}$ và các đạo hàm trên của chúng hữu hạn tại điểm $\bar{y}$. Khi đó, ta luôn có

$$F(\bar{x}) \ge F(\bar{y}).$$

Chứng minh. Theo giả thiết, tập C lồi và các hàm f_j $(j \in I(\bar{y})), g_i$ $\big(i \in J(\bar{y})\big)$ giả lồi tại $\bar{y}$, do đó, ta có bất đẳng thức sau

$$df_j(\bar{y}, \bar{x} - \bar{y}) \le f_j(\bar{x}) - f_j(\bar{y}).$$

Suy ra

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j df_j(\bar{y}, \bar{x} - \bar{y}) \le \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \left(f_j(\bar{x}) - f_j(\bar{y})\right)$$

$$= \sum_{j\in I(\bar{y})} \lambda_j(f_j(\bar{x}) - f_j(\bar{y}))$$

$$\le \sum_{j\in I(\bar{y})} \lambda_j(max\{f_j(\bar{x}): j = 1,2,\dots,p\} - f_j(\bar{y}))$$

$$= \sum_{j\in I(\bar{y})} \lambda_j(max\{f_j(\bar{x}): j = 1,2,\dots,p\} - F(\bar{y}))$$

$$= \sum_{j\in I(\bar{y})} \lambda_j\big(F(\bar{x}) - F(\bar{y})\big) = F(\bar{x}) - F(\bar{y}). \quad (4)$$

Tương tự như trên, ta có

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i dg_i(\bar{y}, \bar{x} - \bar{y}) \le \sum_{i=1}^{m} \mu_i\big(g_i(\bar{x}) - g_i(\bar{y})\big)$$

$$= \sum_{i\in J(\bar{y})} \mu_i\big(g_i(\bar{x}) - g_i(\bar{y})\big) \le 0. \quad (5)$$

Vì $(\bar{y}, \lambda, \mu) \in K(D)$ kéo theo

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j df_j(\bar{y}, v) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i dg_i(\bar{y}, v) \ge 0$$

nên kết hợp điều này với việc cộng vế theo vế các bất đẳng thức (4) và (5) ta được $F(\bar{x}) - F(\bar{y}) \ge 0$. ■

Định lí 4.2. (Đối ngẫu mạnh) Cho $\bar{x} \in K$ là nghiệm cực tiểu toàn cục của bài toán gốc (P). Giả sử rằng các điều kiện của Định lí 3.1 được thỏa mãn. Khi đó, tồn tại các nhân tử Lagrange $\lambda = \big(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\big) \in \mathbb{R}^p_+$, trong đó $\lambda_j = 0$ với mọi $j \notin I(\bar{x})$ và $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$ và $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m_+$, với $\mu_i = 0$ với mọi $i \notin J(\bar{x})$ sao cho $(\bar{x}, \lambda, \mu) \in K(D)$.

Hơn nữa, nếu ta thêm giả thiết là các hàm $f_j\ (j \in I(\bar{x})), g_i\ (i \in J(\bar{x}))$ giả lồi tại điểm $\bar{x}$ thì $(\bar{x}, \lambda, \mu) \in K(D)$ là nghiệm cực đại toàn cục của bài toán đối ngẫu (D).

Chứng minh. Ta có tập C lồi và điều kiện chính quy (RC) của bài toán tối ưu gốc không lồi (P) thỏa mãn tại điểm $\bar{x}$. Vì $\bar{x} \in K$ là nghiệm cực tiểu toàn cục của bài toán (P) nên áp dụng Định lí 3.1 tồn tại các nhân tử Lagrange $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p_+$, với $\lambda_j = 0$ với mọi $j \notin I(\bar{x})$ và $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$ và $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m_+$ với $\mu_i = 0$ với mọi $i \notin J(\bar{x})$ sao cho

$$min_{v \in C - \bar{x}} \left(\sum_{j=1}^p \lambda_j df_j(\bar{x}, v) + \sum_{i=1}^m \mu_i dg_i(\bar{x}, v) \right) \geq 0.$$

Theo định nghĩa, ta suy ra $(\bar{x}, \lambda, \mu) \in K(D)$.

Bây giờ, nếu ta thêm giả thiết rằng các hàm $f_j\ (j \in I(\bar{x})), g_i\ (i \in J(\bar{x}))$ giả lồi tại $\bar{x}$ thì áp dụng định lí đối ngẫu yếu, với mọi nghiệm chấp nhận được $(y, \lambda', \mu') \in K(D)$, ta có $F(\bar{x}) - F(y) \geq 0$. Theo Định nghĩa 4.1, véctơ $(\bar{x}, \lambda, \mu) \in K(D)$ là nghiệm cực đại toàn cục của bài toán đối ngẫu (D). ■

Ví dụ 4.3. Xét bài toán tối ưu (P), với $n = 2$, $p = 3, m = 2, C = \mathbb{R}^2$ và xét các hàm số thực sau

$$f_1(x, y) = |x| + y,$$
$$f_2(x, y) = -|x| + y - 2024,$$
$$f_3(x, y) = |x| + y - 2025,$$
$$g_1(x, y) = |y| - x$$

và $g_2(x, y) = |x| - y$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$**.** Suy ra $F(x, y) = |x| + y$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ và $I(x, y) = \{1\}$. Khi đó tập chấp nhận được $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : x = y\}$. Chọn điểm $\bar{x} = (a, a) \in K$ với mọi số thực a ≥ 0 và điểm $\bar{y} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dễ dàng kiểm tra bằng định nghĩa các hàm f_1, g_1 *và* g_2 giả lồi tại $\bar{y}$ và các đạo hàm trên của chúng hữu hạn tại $\bar{y}$.

Bài toán đối ngẫu (D) cho bài toán tối ưu min gốc (P) được xác định bởi:

$$\max_{y \in C} F(y) \text{ với điều kiện } (y, \lambda, \mu) \in K(D), \qquad \text{(D)}$$

trong đó, tập chấp nhận được đối ngẫu $K(D)$ có dạng:

$$\left\{ \begin{array}{c} (\bar{y}, \lambda, \mu) \in C \times \mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^2_+ \\ \sum_{j=1}^3 \lambda_j df_j(\bar{y}, v) + \sum_{i=1}^2 \mu_i dg_i(\bar{y}, v) \ \geq 0, \\ \forall v \in C - \bar{y}, \lambda_j = 0 \text{ với mọi } j \notin I(\bar{y}) \text{ và } \sum_{j=1}^3 \lambda_j = 1, \\ \mu_i = 0 \text{ với mọi } i \notin J(\bar{y}) \end{array} \right\}$$

hay là

$$K(D) = \left\{ \begin{array}{c} (\bar{y}, \lambda, \mu) \in C \times \mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^2_+ \\ df_1(\bar{y}, v) + \mu_1 dg_1(\bar{y}, v) \\ +\mu_2 dg_2(\bar{y}, v) \geq 0, \\ \forall v \in C - \bar{y}. \end{array} \right\}.$$

Với mọi nghiệm chấp nhận được $((x, y), \lambda, \mu) \in K(D)$, theo Định lí 4.1 ta có $F(\bar{x}) \geq F(\bar{y})$, hay là

$$|x| + y \leq a + |a| = 2a.$$

Vậy định lý đối ngẫu yếu cung cấp một bị chặn dưới cho hàm mục tiêu của bài toán gốc (P).

5. Kết luận

Trong bài báo này nhóm tác giả đã thiết lập được điều kiện hữu hiệu cần và đủ cho nghiệm cực tiểu toàn cục của bài toán tối ưu không lồi (P) có các ràng buộc bất đẳng thức và ràng buộc tập với hàm mục tiêu là max của các thành phần của hàm véctơ nào đó thông qua các đạo hàm trên. Nhóm tác giả cũng xây dựng mô hình đối ngẫu dạng max cho bài toán tối ưu min (P) và đồng thời cũng cung cấp các định lí về tính đối ngẫu mạnh và định lí về đối ngẫu yếu của chúng.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển Khoa học và Công nghệ Đại học Đà Nẵng trong đề tài có mã số B2023-DN03-08.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] J. P. Aubin and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhauser, Boston, 1990.

[2] B. Jiménez and N. Novo, "First order optimality conditions in vector optimization involving stable functions", *Optimization*, vol. 57, no. 3, pp. 449-471, 2008.

[3] G. D. Yalcin, and R. Kasimbeyli, "Generalized derivatives and optimality conditions in nonconvex optimization", *Bull. Malays. Math. Sci. Soc*., vol. 47, no. 81, pp. 1-30, 2024.

[4] P. N. Tinh, "Optimality conditions for nonsmooth vector problems in normed spaces", *Optimization*, vol. 69, no. 6, pp. 1151-1186, 2020.

[5] P. N. Tinh, "On optimality conditions for nonsmooth vector problems in normed spaces via generalized Hadamard directional derivatives", *Optimization*, vol. 72, no. 4, pp. 1037-1068, 2023.

[6] T. D. Chuong, and D. S. Kim, "Nondifferentiable minimax programming problems with applications", *Ann. Oper. Res.*, vol. 251, no. 1-2, pp. 73-87, 2017.

[7] Z. Hong, K. D. Bae, and D. S. Kim, "Minimax programming as a tool for studying robust multi-objective optimization problems", *Ann. Oper. Res.* vol. 319, no. 2, pp. 1589-1606, 2022.

[8] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.